Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 4

Abgabe am 11.11.2015 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es werden positive Zahlen x und y, die beide nicht größer als 2 sind, rein zufällig ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weder das Produkt xy den Wert 1 noch der Quotient y/x den Wert 2 übersteigt.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 Punkte)

In einer Kiste werden bunt gemischt 100 gleichartige Teile ausgeliefert. Davon stammen 65 aus dem Werk I, unter denen sich 3 Ausschussteile befinden, und 35 aus dem Werk II, unter denen sich 2 Ausschussteile befinden. Gib die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass ein zufällig ausgewähltes Teil

(a) kein Ausschussteil Teil ist und von Werk II stammt,

(b) von Werk II stammt, wenn es ein kein Ausschussteil ist,

(c) von Werk I stammt, wenn es ein Ausschussteil ist.

Aufgabe 3 (3 + 2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und sei $B \in \mathcal{F}$ ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Definiere die Mengenfunktion $Q : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $Q(A) = P(A \mid B)$ für jedes $A \in \mathcal{F}$. Zeige:

(a) $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ und $(B, \mathcal{F} \cap B, Q_B)$ sind Wahrscheinlichkeitsräume, wobei Q_B die Einschränkung von Q auf die Spur-σ-Algebra $\mathcal{F} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ bezeichnet.

(b) $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$ für jedes $C \in \mathcal{F}$ mit $P(C) > 0$.

Aufgabe 4 (3 + 1 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{F}$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Seien A und B, B und C sowie A und C jeweils paarweise unabhängig. Dann gilt $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

(b) Sei A unabhängig zu sich selbst. Dann gilt $P(A) \in \{0, 1\}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Du hast die Chance in der Spielshow 'Let's make a deal' ein Auto zu gewinnen. Dazu sind auf der Bühne vier Tore mit den Nummern 1,2,3 und 4 aufgebaut. Hinter genau einem, vom Moderator rein zufällig ausgewähltem Tor befindet sich das Auto, hinter den anderen drei Toren befindet sich jeweils nur eine Topfpflanze. Du wählst nun ein Tor rein zufällig aus, dieses bleibt aber vorerst geschlossen. Der Moderator, der ja weiß wo das Auto steht, öffnet daraufhin zwei der drei verbleibenden Tore und es erscheinen zwei Topfpflanzen. Du hast nun die Möglichkeit bei deiner ursprünglichen Wahl zu bleiben oder zu dem anderen verbleibenden geschlossenen Tor zu wechseln. Welche Strategie solltest du verfolgen, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit das Auto zu gewinnen? Löse die Aufgabe mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 6 (3 + 3 Punkte)

Betrachte die Einschränkung der Riemannschen Zeta-Funktion auf $(1,\infty)$, das heißt die Funktion $\zeta : (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Es soll die Eulersche Primzahlformel

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathfrak{p}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

mit Hilfe probabilistischer Methoden bewiesen werden, wobei $\mathfrak{p}$ die Menge aller Primzahlen bezeichnet. Dazu betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1]$ für ein beliebiges $s \in (1,\infty)$ durch $P(\{n\}) = \zeta(s)^{-1}n^{-s}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

(a) Definiere für beliebiges $a \in \mathbb{N}$ die Menge $a\mathbb{N} = \{an : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $N \geq 2$ und seien $p_1, \ldots, p_N \in \mathfrak{p}$ beliebige voneinander verschiedene Primzahlen. Zeige, dass die Teilmengen $p_1\mathbb{N}, \ldots, p_N\mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$ eine Familie von unabhängigen Ereignissen bilden.

(b) Sei $s \in (1,\infty)$ beliebig. Nutze $\zeta(s)^{-1} = P(\{1\})$, um die Eulersche Primzahlformel

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathfrak{p}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

zu beweisen.