Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 5

Abgabe am 19.11.2015 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1 + 2 + 2 Punkte)
Sei $N \geq 1$ und $p \in [0,1]$. Betrachte die N-malige unabhängige Wiederholung eines Münzwurfs, bei dem mit Wahrscheinlichkeit p Kopf und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ Zahl geworfen wird. Bezeichne X die Anzahl der Münzwurfe, bei denen Kopf geworfen wurde.

(a) Sei $N = 6$. Berechne $P(X > 0)$.

(b) Wie oft muss die Münze mindestens geworfen werden, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal Kopf geworfen wird.

(c) Sei $k \geq 1$. Für welche Wahl von $p \in [0,1]$ wird $P(X = k)$ maximal, wenn $N \geq 1$ fest ist?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $N \geq 2, p \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ und $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ eine Menge. Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ mit $P(\{\omega_1\}) = 1-(N-1)p$ und $P(\{\omega_i\}) = p$ für jedes $i \in \{2, \ldots, N\}$. Seien $A, B \subset \Omega$ beliebig mit $A, B \notin \{\emptyset, \Omega\}$. Zeige, dass A und B nicht unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $Y(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Zeige, dass $X + Y, XY, X/Y, \min\{X, Y\}$, sowie $g(X)$ und $f(X)$ Zufallsvariablen sind, wobei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monotone und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist.
Hinweis: Man kann zeigen, dass $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\} \in \mathcal{F}$. *Denn*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq q\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < q\}).$$

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (1,5 + 1 + 1,5 Punkte)
Sei $\mathbf{p} = \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge mit $p_n = cq^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $c \geq 0, q \in [0, 1]$.

(a) Bestimme c so, dass $\mathbf{p}$ eine Zähldichte ist.

Sei X eine Zufallsvariable mit $P(X \in \mathbb{N}) = 1$ und Zähldichte $\mathbf{p}$.

(b) Berechne $P(X \text{ ist gerade})$.

(c) Bestimme die Zähldichte der Zufallsvariablen $Y = \min\{X, 5\}$ und skizziere deren Verteilungsfunktion für $q = 1/2$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Zeige, dass eine Zufallsvariable X genau dann geometrisch verteilt ist, falls $P(X \in \mathbb{N}) = 1$ und

$$P(X = n + k \mid X > n) = P(X = k)$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim wiederholten unabhängigen Werfen einer fairen Münze im zehnten Versuch Zahl zu werfen, wenn zuvor neun mal Kopf geworfen wurde?

Aufgabe 6 (0,5 + 1 + 1,5 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable. Definiere die Folge $\{a_k : k \geq 1\}$ durch

$$P(X = k + 1) = a_k P(X = k)$$

für alle $k \in D$, wobei D eine gewisse Teilmenge ner natürlichen Zahlen ist. Bestimme jeweils a_k für alle $k \in D$, falls

(a) X geometrisch verteilt ist mit Parameter $p \in [0, 1]$ und $D = \mathbb{N}$,

(b) X Poisson-verteilt ist mit Parameter $\lambda > 0$ und $D = \mathbb{N}$,

(c) X binomial verteilt ist mit Parametern $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ und $D = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n - 1\}$.