Prof. Dr. Volker Schmidt
Matthias Neumann

Wintersemester 2015/2016

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 6

Abgabe am 26.11.2015 vor Beginn der Übung

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)
Zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißen stochastisch äquivalent, falls

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1.$$

Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) Zwei stochastisch äquivalente Zufallsvariablen besitzen die gleiche Verteilung.

(b) Wenn zwei Zufallsvariablen die gleiche Verteilung besitzen, dann sind sie stochastisch äquivalent.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ eine Funktion mit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < -1 \\ 1/2, & \text{falls } -1 \leq x < 0 \\ 1/2 + x/4, & \text{falls } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

(a) Zeige, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

Sei nun $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.

(b) Berechne $P(X = x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und berechne $P(-1 < X < 2)$.

(c) Berechne die Verteilungsfunktion $F_Y : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ der Zufallsvariablen $Y = \min\{X, 1\}$.

(d) Berechne $P(X + Y = 3)$.

(e) Skizziere die Verteilungsfunktionen F und F_Y.

Bitte wenden.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c\exp(-\lambda x)\,(1-\exp(-\lambda x)), & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$.

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

(b) Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit der in Teilaufgabe (a) bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichte f. Bestimme die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ von X und berechne $P(1 \leq X \leq 4)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Sei $\sigma > 0$ und $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, wobei X gleichverteilt ist über dem offenen Intervall $(0,1)$, d.h. $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Definiere die Abbildung $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mittels

$$F(x) = P\left(\sigma\sqrt{-2\log(X)} \leq x\right),$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass F die Verteilungsfunktion einer absolutstetigen Zufallsvariablen ist und bestimme ihre Dichte.
Beachte: Eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F heißt Rayleigh-verteilt mit Parameter σ. Die Rayleighverteilung findet beispielsweise Anwendung in der Modellierung von Windgeschwindigkeiten.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Ein Meinungsforschungsinstitut will den voraussichtlichen Stimmanteil p der Partei A ermitteln, wenn am Sonntag Bundestagswahl wäre. Dazu werden n Wahlberechtigte befragt und jeweils vermerkt, ob sie für die Partei A stimmen werden oder nicht. Wie viele Wahlberechtigte müssen mindestens befragt werden, um den Stimmenanteil der Partei (bis auf $\pm$ 2 %) mit einer Sicherheit von mindestens 95% vorhersagen zu können?
Hinweis: Die Aufgabe soll mit dem zentralen Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace gelöst werden. Eine Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist im Skript in Abschnitt 7 gegeben.