



Stochastik für WiWi - 1. Klausur

Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein nicht programmierbarer Taschenrechner; Ein von Hand beschriftetes DIN A4 Blatt.
- **Bewertung:** Es gibt 110 Punkte; 100 Punkte entsprechen 100%. Der Lösungsweg muss stets nachvollziehbar sein; gemachte Aussagen müssen begründet werden.
- **Tabellen** für Standardnormalverteilung und t-Verteilung sind auf der Rückseite zu finden.

Aufgabe 1 (5 + 5 + 10 Punkte)

Wenn man beim Mensch-ärgere-Dich-nicht keine Figur auf dem Spielfeld hat, so hat man pro Runde 3 Versuche, eine Sechs zu würfeln, was einem erlaubt, eine Figur ins Spiel zu bringen ("Man kommt raus").

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt man in einer gegebenen Runde raus?
- Wie viele Runden dauert es im Schnitt, bis man rauskommt?
- Man spielt 100 Runden. Berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit, in mindestens 35 der 100 Runden rauszukommen.

Aufgabe 2 (8 + 7 Punkte)

Bei der Auslosung der ersten Runde des DFB-Pokals werden zwei Lostöpfe verwendet. Im ersten Topf befinden sich die 18 Mannschaften der ersten Liga, sowie die 14 Bestplatzierten der zweiten Liga. Im zweiten Lostopf sind die restlichen 4 Mannschaften der zweiten Liga, 4 Mannschaften aus der dritten Liga sowie 24 Amateurmannschaften. Jeder Mannschaft aus Topf 1 wird ein Gegner aus Topf 2 zugelost. Der FC Bayern München, ein Verein aus der ersten Liga, gewinnt gegen einen Gegner aus der zweiten Liga mit Wahrscheinlichkeit 90 %. Gegen einen Gegner aus der dritten Liga beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 93%, gegen einen Amateurverein sogar 97%.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der FC Bayern München sein Auftaktspiel im DFB-Pokal?
- Der FC Bayern München hat sein Auftaktspiel verloren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit waren die Gegner Amateure?

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte)

Es sei $X \sim N_{5,2}$ und $Y = X^2$. Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse $\{\omega : X(\omega) \leq 0\}$ und $\{\omega : Y(\omega) \leq 1\}$.

Aufgabe 4 (4 + 5 + 8 + 3 Punkte)

Die gemeinsame Zähldichte des Zufallsvektors (X, Y) ist durch folgendes Tableau gegeben:

		X		
	Y	-1	0	2
	2	0,1	p	0,05
	4	0,2	0,2	0,15.

- Bestimme den Wert p .
- Skizziere die Verteilungsfunktion von X .
- Berechne die Kovarianz von X und Y .
- Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 5 (5 + 10 + 8 Punkte)

Für $\alpha > 0$ habe die Verteilung F_α die Dichte f_α , gegeben durch

$$f_\alpha(t) := \alpha t^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(t).$$

- Weise nach, dass f_α tatsächlich eine Dichte ist.
- Es sei $X \sim F_{\frac{1}{2}}$. Berechne $\mathbb{P}(X > \frac{1}{4})$ und, soweit existent, $\mathbb{E}X$.
- Bestimme einen Schätzer für den Parameter α mit der Maximum Likelihood Methode.

Aufgabe 6 (6 + 8 + 8 Punkte)

Die Nitratbelastung des Trinkwassers in Ulm soll untersucht werden. Hierzu wird der Gehalt von NO_3^- in mg/ℓ gemessen. Der zulässige Grenzwert beträgt $50 \text{ mg}/\ell$. Es werden folgende Werte gemessen:

48,7; 49,3; 51,2; 49,4; 50,9.

Es kann davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei um die Realisierung einer Zufallsstichprobe zur Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 handelt. Die Parameter μ und σ^2 sind nicht bekannt.

- Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.
- Bestimme ein 95%-Konfidenzintervall für μ .
- Teste zum Signifikanzniveau 1% die Hypothese $H_0 : \mu > 50$ gegen die Alternative $H_1 : \mu \leq 50$.

Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Erklärung: Die Tabelle enthält auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte von $\Phi(x)$, wobei $0 \leq x \leq 4,09$ gilt und Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte den Wert, der bis zur ersten Nachkommastelle x entspricht. Dann geht man bis zur Spalte der zweiten Nachkommastelle von x nach rechts. Beispielsweise steht $\Phi(0,12)$ in der zweiten Zeile und dritten Spalte: $\Phi(0,12) \approx 0,54776$. Für negative x verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Für $x \geq 4,1$ verwenden wir die Näherung $\Phi(x) \approx 1$.

Quantile $t_{n;\beta}$ zu Students t -Verteilung t_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $t_{9;0,95} \approx 1.833$

n	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.9875	n
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	1
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	2
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.177	3
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.163	5
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	2.969	6
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.841	7
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.752	8
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.685	9
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.634	10
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.593	11
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.560	12
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.533	13
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.510	14
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.490	15
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.473	16
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.458	17
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.445	18
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.433	19
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.423	20

n	0.99	0.995	0.9975	0.9985	0.999	0.9995	n
1	31.821	63.657	127.321	212.205	318.309	636.619	1
2	6.965	9.925	14.089	18.216	22.327	31.599	2
3	4.541	5.841	7.453	8.891	10.215	12.924	3
4	3.747	4.604	5.598	6.435	7.173	8.610	4
5	3.365	4.032	4.773	5.376	5.893	6.869	5
6	3.143	3.707	4.317	4.800	5.208	5.959	6
7	2.998	3.499	4.029	4.442	4.785	5.408	7
8	2.896	3.355	3.833	4.199	4.501	5.041	8
9	2.821	3.250	3.690	4.024	4.297	4.781	9
10	2.764	3.169	3.581	3.892	4.144	4.587	10
11	2.718	3.106	3.497	3.789	4.025	4.437	11
12	2.681	3.055	3.428	3.706	3.930	4.318	12
13	2.650	3.012	3.372	3.639	3.852	4.221	13
14	2.624	2.977	3.326	3.583	3.787	4.140	14
15	2.602	2.947	3.286	3.535	3.733	4.073	15
16	2.583	2.921	3.252	3.494	3.686	4.015	16
17	2.567	2.898	3.222	3.459	3.646	3.965	17
18	2.552	2.878	3.197	3.428	3.610	3.922	18
19	2.539	2.861	3.174	3.401	3.579	3.883	19
20	2.528	2.845	3.153	3.376	3.552	3.850	20