Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
18.12.2015

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 10

Abgabe: 8. Januar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 3 + 3 Punkte)

Nachdem die Firma „Spiel- und Spaßautomaten“ in den letzten Jahren einen Rekordumsatz mit ihren Glühwein- und Crêpes-Automaten auf dem Ulmer Weihnachtsmarkt erzielt hat, soll in diesem Jahr das Angebot um einen Feuerwurst-Automaten ergänzt werden (um schließlich die Herrschaft über den gesamten Weihnachtsmarkt zu übernehmen). Dabei kann man die Wurst mit Senf oder Zaziki bestellen. Da das eigentliche Fachgebiet von „Spiel- und Spaßautomaten“ (nach wie vor) die Herstellung von Glücksspielautomaten ist, wurde der Feuerwurst-Automat mit einem Zufallsgenerator ausgestattet. Eine Feuerwurst mit Senf aus dem Automaten kostet 3 €, eine mit Zaziki 4.50 €. Beim Einwurf der Summe bekommt man entweder die gewählte Wurst, gar keine oder eine Wurst mit Senf und Zaziki. Du lässt dir fünf mal hintereinander eine Feuerwurst mit Senf aus dem Automaten und notierst dabei den entsprechenden Gewinn in Euro mit X, d.h. $X \in \{-3, 0, 1.5\}$[1]. Das Ergebnis deiner Versuche ist $(1.5, -3, 0, -3, 0)$. Mit Hilfe dieser Daten versuchst Du herauszufinden wie X verteilt ist.

(a) Wie würdest Du die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bestimmen, wenn Du keine weitere Information über die Form der Zähldichte hättest?

(b) Du willst es nun genau wissen und wirfst einen Blick auf die Homepage von „Spiel- und Spaßautomaten“. Dabei findest du heraus, dass X die folgende Zähldichte besitzt:

$$f(x,p) = \begin{cases} 3p/2 & \text{falls } x = -3 \\ p & \text{falls } x = 0 \\ 1 - 5p/2 & \text{falls } x = 1.5 \end{cases},$$

wobei $p \in (0, 2/5)$. Konstruiere einen Schätzer für p gemäß der Momentenmethode aufgrund der vorliegenden Daten.

(c) Berechne $\mathbb{P}_p(X_1 = 1.5, X_2 = -3, X_3 = 0, X_4 = -3, X_5 = 0)$ also die Wahrscheinlichkeit, dass die vorhandene Stichprobe auftritt) unter der Annahme, dass der Gewinn wie in (b) angegeben verteilt ist. Für welchen Wert von p wird diese Wahrscheinlichkeit maximal? Skizziere für diesen Wert von p die Verteilungsfunktion von X.

[1] Bekommst du keine Wurst ist der Gewinn 3 €, bei einer Wurst mit Senf 0 € und wenn du eine Wurst mit Senf und Zaziki bekommst beträgt der Gewinn 1.50 €.

Aufgabe 2 (2 + 3)

$X_1, \dots, X_n$ sei eine Zufallsstichprobe der diskreten Verteilung mit folgender Zähldichte:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{x^2} (1-\theta)^{1-x^2} & \text{falls } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Über den Parameter θ ist lediglich bekannt, dass er positiv und kleiner 1 ist.

(a) Stelle sicher, dass es sich bei f tatsächlich um eine Zähldichte handelt.

(b) Zeige, dass die Ableitung der log-Likelihoodfunktion nach θ durch

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{n}{\theta} \hat{m}_2 - \frac{n}{1-\theta}(1 - \hat{m}_2)$$

gegeben ist und konstruiere einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ. Hierbei sei $\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Aufgabe 3 (2 + 3)

Wirf zwei Münzen (mindestens) zwölfmal gleichzeitig und notiere 0, falls beide Münzen „Zahl“ zeigen und 1 sonst. Diese Notizen bilden die Stichprobe $(x_1, \dots, x_{12})$ einer $Bin(1,p)$-Verteilung mit $p \in (0,1)$. Wir betrachten die Schätzer

$$T_1(x_1, \dots, x_n) := \bar{x} \quad \text{und} \quad T_2(x_1, \dots, x_n) := \frac{n \cdot \bar{x} + 1}{n+2}$$

für p.

(a) Berechne nach jedem Wurf beide Schätzer mit der aktuell vorhandenen Stichprobe.

(b) Liefern beide Schätzer immer plausible Ergebnisse? Sind sie erwartungstreu oder asymptotisch erwartungstreu oder weder noch?

Aufgabe 4 (3 + 2 Punkte)

In einer großen Stadt gibt es N Taxis die - gut zu erkennen - außen die Nummern $1, \dots, N$ tragen. Es stellt sich die Frage, wie man N schätzen kann, wenn man die Nummern $x_1, \dots, x_n$ von n vorbeifahrenden Taxis notiert. Hierzu sei U_N die Gleichverteilung auf den Zahlen $1, 2, \dots, N$, also $p_k = N^{-1}$ für $k = 1, \dots, N$. Sei nun $X_1, \dots, X_n$ eine Zufallsstichprobe zur Verteilung U_N. Betrachte die Schätzer $T_n(X_1, \dots, X_n) := \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(a) Zeige[2], dass die Folge T_n schwach konsistent ist für N.

(b) Ist T_n ein erwartungstreuer Schätzer für N? (Die Antwort ist zu begründen!)

[2] Verwende dafür die Verteilung des Maximums aus Aufgabe 4 von Blatt 9.