Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
13.11.2015

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 5

Abgabe: 20. November vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Bestimme in den folgenden Fällen den Erwartungswert von X:

(a) $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, (Ω, P) Laplace'sch und $X(\omega) = (-1)^\omega$, $\omega \in \Omega$.

(b) $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\omega}, \quad X(\omega) = 2^{\omega+n}, \quad \omega \in \Omega.$$

(c) $\Omega = \mathbb{N}$, $P(\{\omega\}) = \omega p^2(1-p)^{\omega-1}$, für ein $p \in (0, 1)$, $X(\omega) = 1/\omega$, $\omega \in \Omega$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimme den Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen, d.h. einer Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Wertebereich $X(\Omega) = \mathbb{N}$ und $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, für ein $p \in (0, 1)$ (Kontrollergebnis: $\mathbb{E}X = 1/p$).

Aufgabe 3 (3 + 2 Punkte)

Der Manager eines großen deutschen Konzerns hat stets in seiner linken Hosentasche 10 Krügerrand bei sich für den Champagnerautomaten vor seinem Büro. Für eine Flasche Champagner muss er 3 von den Goldmünzen in den Automaten werfen. Ein Krügerrand wiegt eine Unze. Nimm nun an, dass 4 der 10 Münzen gefälscht sind und nur 0.95 Unzen wiegen.

(a) Da der Manager gerade nichts besseres zu tun hat, möchte er eine Flasche Champagner aus dem Automaten holen. Dafür zieht er zufällig 3 Münzen aus seiner Tasche. Bestimme das erwartete Gewicht der Münzen.

(b) Um eine Flasche Champagner zu bekommen darf keine der drei Münzen die er einwirft gefälscht sein. Wie oft muss der Manager im Mittel in seine Tasche greifen damit er eine Flasche bekommt, wenn er nach jedem Ziehen die Münzen wieder in die Tasche zurücklegt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Nachdem Jürgen seine 5 Kollegen zum essen in ein bekanntes Ulmer Sternelokal eingeladen hat, stellt er auf einmal fest, dass er die Rechnung mit seinem kargen Post-Doc Gehalt nicht bezahlen kann. Daraufhin schlägt einer der Kollegen vor Jürgen einzuladen und den Zufall darüber entscheiden zu lassen, wer bezahlen muss. Hierzu spielen die 5 Kollegen „odd man out“ dabei wirft jeder der fünf eine faire Münze und wer etwas anderes hat als alle anderen (der „odd man“), zahlt. (Werfen also 4 Personen „Kopf“ und eine Person „Zahl“, so zahlt der mit „Zahl“; haben umgekehrt 4 Personen „Zahl“ und eine Person „Kopf“, so zahlt die Person mit „Kopf“). Wenn es keinen „odd man“ gibt, wiederholen sie das Spiel. Bestimme die erwartete Anzahl an Spielen, bis man einen „odd man“ hat.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \pi\}$ und Zähldichte $f_X(1) = 1/2$, $f_X(2) = f_X(\pi) = 1/6$ sowie $f_X(3) = c$. Bestimme c, $P(X \le 1)$, $P(X > 5/2)$ sowie $\mathbb{E}X$.