Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
04.12.2015

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 8

Abgabe: 11. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Es sollen 100.000 € in Aktien investiert werden. Dabei stehen 2 Aktien zur Auswahl: Aktie 1 kostet 80 €, der erwartete Kurs in einem Jahr beträgt 90 €, bei einer Standardabweichung von 2 €. Aktie 2 kostet 120 €, der erwartete Kurs in einem Jahr beträgt 150 €, bei einer Standardabweichung von 10 €.
Das Geld soll mit minimalem Risiko investiert werden. Als Risikomaß verwenden wir die Varianz, d.h. wir wollen die 100.000 € so investieren, dass der Wert unseres Portfolios in einem Jahr minimale Varianz hat. Wie ist das Geld zu investieren, wenn

(a) die Kurse in einem Jahr unabhängig sind?

(b) die Kurse in einem Jahr einen Korrelationskoeffizienten von $-0,4$ besitzen?

Die Stückzahlen müssen hier nicht notwendigerweise ganzzahlig sein. Zusätzlich wird stets davon ausgegangen, dass Leerverkäufe nicht erlaubt sind und dass die 100.000 € restlos investiert werden.

Aufgabe 2 (2 + 3 Punkte)

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X^2, \mathbb{E}Y^2 < \infty$.

(a) Zeige, dass die Zufallsvariablen $X+Y$ und $X-Y$ genau dann unkorreliert sind, wenn $\mathsf{Var}X = \mathsf{Var}Y$.

(b) Finde Beispiele für X und Y mit $\mathsf{Var}X = \mathsf{Var}Y$ so, dass $X+Y$ und $X-Y$ nicht unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Von einem Bogenschützen sei bekannt, dass er im Mittel 5 cm neben die Mitte der Zielscheibe trifft. Außerdem betrage die Standardabweichung 2 cm. Mit mindestens welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Schütze in einen Bereich der zwischen 1 und 9 cm von der Mitte der Scheibe entfernt liegt[1]?

Aufgabe 4 (3 + 2 Punkte)

Seien X und Y zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $P(X=1) = P(X=-1) = 1/2$ und sei $Z = X \cdot Y$. Zeige:

(a) X und Z sind unabhängig.

(b) X, Y und Z sind nicht unabhängig.

Aufgabe 5 (2 + 2 Punkte)

Eine Firma verkauft für 1200 € ein Gerät, bei dem zwei Teile T_1 und T_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.1$ und $p_2 = 0.05$ (unabhängig voneinander) während der Garantiezeit ausfallen. Die Reparatur von T_1 kostet 50 €, die von T_2 dagegen 200 €.

(a) Bestimme die erwarteten Reperaturkosten bei einem Gerät, sowie deren Varianz.

(b) Die anfallenden durchschnittlichen Reparaturkosten sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % um höchstens 20 € vom Erwartungswert abweichen. Wie viele Geräte muss die Firma dafür mindestens verkaufen[1]?

Hinweis zu Aufgabe 5, (b): Es sei n die Anzahl der Geräte die verkauft werden müssen. Bezeichnet man mit X_i die (zufälligen) Reparaturkosten von Gerät i, $i = 1, \dots, n$, so sind die durchschnittlichen Reparaturkosten aller verkauften Geräte gegeben durch

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Dabei gehen wir davon aus, dass $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind und alle die gleiche Verteilung (die in Teil (a) zu bestimmen ist um den Erwartungswert zu berechnen) besitzen. Du kannst ohne Beweis verwenden, dass

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbb{E}X_1, \quad \mathsf{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\mathsf{Var}X_1}{n}.$$

Durch Anwendung der Tschebyscheff Ungleichung auf den Durchschnitt kannst du nun ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ bestimmen, so, dass die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt wird.

[1] Verwende die Tschebyscheff Ungleichung.