Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
19. Dezember 2016

Angewandte Stochastik 2 - Übungsblatt 10

Besprechung: 9. Januar in der Übung (**16-18 Uhr in H14**).

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe. Bestimme ein asymptotisches Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma \in [0,1]$ für den Parameter θ, falls

(a) $X_1 \sim U(0, \theta)$, $\theta > 0$.

(b) $X_1 \sim \mathsf{Exp}(\theta)$, $\theta > 0$.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 Punkte)

Es seien $X_{11}, \ldots, X_{1n}$ sowie $X_{21}, \ldots, X_{2n}$ zwei gepaarte Stichproben mit $(X_{1i}, X_{2i})^\top \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \Sigma)$, wobei $\mu = (\mu_1, \mu_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ und

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnen $\sigma_1^2 = \mathsf{Var}(X_{1i})$, $\sigma_2^2 = \mathsf{Var}(X_{2i})$, sowie $\sigma_{12} = \mathsf{Cov}(X_{1i}, X_{2i})$, $i = 1, \ldots, n$. In dieser Aufgabe soll ein Konfidenzintervall für $\mu_1 - \mu_2$ konstruiert werden.

(a) Es bezeichne $D_i = X_{1i} - X_{2i}$, $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $D_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})$.

(b) Konstruiere mit Hilfe von Aufgabe (a) ein Konfidenzintervall zum Niveau $\gamma \in [0,1]$ für $\mu_1 - \mu_2$, falls Σ bekannt ist.

(c) Die folgenden Werte geben die Blutdruckwerte von 10 Patienten an. Dabei entsprechen die Werte in der ersten Zeile jeweils ihren Blutdruckwerten zu Beginn der Behandlung, die Werte in der zweiten Zeile den Blutdruckwerten nach zwei Monaten Behandlung mit einem Medikament. Berechne unter

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{1i}	144.20	139.10	139.50	139.00	138.20	141.40	138.10	137.30	140.30	138.70
x_{2i}	124.60	120.20	125.10	119.10	120.80	118.50	118.50	115.40	121.60	119.20

der Annahme, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5$ und $\sigma_{12} = 0.5$ gilt, das 95%-Konfidenzintervall für die Differenz $\mu_1 - \mu_2$ der Erwartungswerte.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein normalverteilter Zufallsvektor. Zeige: Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind genau dann unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.

Aufgabe 4 (3 + 4 Punkte)

Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein Zufallsvektor mit $\mathsf{Var}(X_1)$, $\mathsf{Var}(X_2) < \infty$.

(a) Zeige: Die Zufallsvariablen $X_1 - X_2$ und $X_1 + X_2$ sind genau dann unkorreliert, wenn $\mathsf{Var}(X_1) = \mathsf{Var}(X_2)$ gilt.

(b) Zeige[1]: Der Zufallsvektor X ist genau dann normalverteilt, wenn $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ normalverteilt ist für beliebige λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (1 + 3 + 2 Punkte)

In einer Teigfabrik steht eine Befüllungsanlage. Die Fabrik gibt an, dass die Einfüllmenge des Teiges in die Pakete durch diese Befüllungsanlage normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 6.1$ kg und Varianz $\sigma^2 = 0.01$ kg^2 sei.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 6 kg eingefüllt werden?

(b) Kontrolleur Kleinlich ist heute in der Fabrik zu Besuch, um mehrere Pakete zu überprüfen. Es wird vorausgesetzt, dass die Messungen unabhängig sind. Wie viele Pakete muss Kleinlich mindestens wiegen, um den Mittelwert des Paketgewichts auf 10 g genau angeben zu können (das heißt, dass die Standardabweichung des Mittelwerts 10 g ist)?

(c) Herr Kleinlich hat jetzt insgesamt 25 Pakete ausgewogen und erhält als Mittelwert 6.05 kg. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Mittelwert der Gewichte unter den oben gemachten Annahmen noch kleiner ausfällt?

[1] Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Aussage für unkorrelierte X_1, X_2 gilt.