ulm university universität uulm

Stochastische Geometrie II

Institut für Stochastik

Vorlesungsskript

Dr. Jürgen Kampf

Wintersemester 2016-2017

Stand: 15. Februar 2017

b

Literaturverzeichnis

[1] S. Chiu, D. Stoyan, W. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic Geometry and Its Applications.* Wiley, 2013.

[2] I. Molchanov. *Theory of Random Sets.* Springer, 2005.

[3] V. Schmidt. *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields.* Springer, 2015.

[4] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry.* Springer, 2008.

[5] E. Spodarev. *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields.* Springer, 2013.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Random compact sets

Es bezeichne

- $\mathcal{F}$ das System der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{C}$ das System der kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$

Für $A \subseteq \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\mathcal{F}^A := \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A = \varnothing\}$$

Definition 1.1.

(i) Die von den Mengen der Form $\mathcal{F}^C$, $C \in \mathcal{C}$, erzeugte σ-Algebra heißt Matheron-σ-Algebra.

(ii) Eine Abbildung $Z : \Omega \to \mathcal{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt zufällige abgeschlossene Menge, falls sie bzgl. der Matheron-σ-Algebra messbar ist.

(iii) Eine zufällige abgeschlossene Menge Z heißt zufällige kompakte Menge, falls $\mathbb{P}(Z \in \mathcal{C}) = 1$.

1.1 The convex hull of random points

In this section we examine stochastic properties (mainly the expected value) of geometric functionals of the convex hull of finitely many random points.
A set $K \subseteq \mathbb{R}^d$ is called convex if for all $x, y \in K, \lambda \in [0,1]$ we have $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$. So a set $K \in \mathbb{R}^d$ is convex iff for all $x, y \in K$ we have $[x,y] \subseteq K$, where $[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\}$ is the line segment joining x and y.

Theorem 1.2. *Let $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Then there is a convex set $L \subseteq \mathbb{R}^d$ with $A \subseteq L$ and $L \subseteq M$ for any convex set $M \subseteq \mathbb{R}^d$ with $A \subseteq M$. This set L is determined uniquely.*

Proof: Put

$$\mathcal{M} := \{M \subseteq \mathbb{R}^d \mid A \subseteq M \text{ and } M \text{ is convex }\}$$

and

$$L := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M.$$

Then L is convex, $A \subseteq L$ and for every convex set M with $A \subseteq M$ we have $L \subseteq M$.
Let L_1 and L_2 be two sets with this property. Then, since $A \subseteq L_2$ and L_2 is convex, we have $L_1 \subseteq L_2$. The same way $L_2 \subseteq L_1$. Thus $L_1 = L_2$. □

Definition 1.3. *Let $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Then the set L from Theorem 1.2 is called convex hull of L and denoted by* $\operatorname{conv} A$.

Lemma 1.4. *Let $A \subseteq \mathbb{R}^d$ be compact. Then* $\operatorname{conv} A$ *is compact as well.*

Proof: skipped.

Put $\mathcal{K}' := \{K \subseteq \mathbb{R}^d \mid K \text{ is convex and compact and has non-empty interior}\}$. For $K \in \mathcal{K}'$ and $n \in \mathbb{N}$ put

$$\lambda_d(K,n) := \lambda_d(\operatorname{conv}\{X_1,\dots,X_n\}),$$

where $X_1,\dots,X_n$ are i.i.d. random variables distributed uniformly in K. Let $f_0(K,n)$ be the number of vertices of $\operatorname{conv}\{X_1,\dots,X_n\}$.

Theorem 1.5. *Let $K \in \mathcal{K}'$ and let $n,k \in \mathbb{N}$. Then*

$$\frac{\mathbb{E}\lambda_d\left(K,n\right)^k}{\lambda_d\left(K\right)^k} = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{f_0(K,n+k)}{n+i}\right)\right].$$

Corollary 1.6 (Efron's identity)**.** *Let $K \in \mathcal{K}$ and $n \in \mathbb{N}$. Putting $k=1$, we get*

$$\frac{\mathbb{E}\lambda_d(K,n)}{\lambda_d(K)} = \mathbb{E}\left[1 - \frac{f_0(K,n+1)}{n+1}\right]$$

and hence

$$(n+1)\frac{\lambda_d(K) - \mathbb{E}\lambda_d(K,n)}{\lambda_d(K)} = \mathbb{E}\left[f_0(K,n+1)\right].$$

Proof of Theorem 1.5: Let $X_1,\dots,X_n$ be i.i.d. points distributed uniformly in K. Let $P_{n,k}$ denote the number of k-element subsets of points of $\{X_1,\dots,X_{n+k}\}$ which are not vertices of $\operatorname{conv}\{X_1,\dots,X_{n+k}\}$. Since there are $n+k-f_0(K,n+k)$ points in $\{X_1,\dots,X_{n+k}\}$ which are not vertices of K, we have

$$P_{n,k} = \binom{n+k-f_0(K,n+k)}{k},$$

where $\binom{m}{k} = 0$ for $m<k$. Let $p_{n,k}$ be the probability that $X_1,\dots,X_k$ are all contained in $\operatorname{conv}\{X_{k+1},\dots,X_{n+k}\}$, i.e. that none of the points $X_1,\dots,X_k$ is a vertex of $\operatorname{conv}\{X_1,\dots,X_{n+k}\}$. There are $\binom{n+k}{k}$ ways to choose a k-element subset of $\{X_1,\dots,X_{n+k}\}$. Since $X_1,\dots,X_{n+k}$ are i.i.d., all these subsets have the same probability $p_{n,k}$ of not intersecting the vertices of $\operatorname{conv}\{X_1,\dots,X_{n+k}\}$. Thus

$$\mathbb{E}\,P_{n,k} = \binom{n+k}{k} p_{n,k}.$$

So let us compute

$$p_{n,k} = \mathbb{P}\left(X_1,\dots,X_k \in \operatorname{conv}\{X_{k+1},\dots,X_{n+k}\}\right)$$

Assume for a moment that $X_{k+1},\dots,X_{n+k}$ were deterministic. Then this probability equals

$$\frac{\left(\lambda_d\left(\operatorname{conv}\{X_{k+1},\dots,X_{n+k}\}\right)\right)^k}{\lambda_d(K)^k}.$$

Due to the independence the entire probability just equals

$$p_{n,k} = \mathbb{E}\frac{\left(\lambda_d\left(\operatorname{conv}\{X_{k+1},\dots,X_{n+k}\}\right)\right)^k}{\lambda_d(K)^k}.$$

Putting everything together we conclude

$$\mathbb{E}\binom{n+k-f_0(K)}{k} = \binom{n+k}{k}\mathbb{E}\left[\frac{\lambda_d(K,n)^k}{\lambda_d(K)^k}\right]$$

and thus

$$\frac{\mathbb{E}\lambda_d(K,n)^k}{\lambda_d(K)^k} = \mathbb{E}\left[\frac{\prod_{i=1}^k n+i-f_0(K,n+k)}{\prod_{i=1}^k n+i}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k 1-\frac{f_0(K,n+k)}{n+i}\right]. \quad \square$$

Corollary 1.7. *For $n \geq d+1$ and $k \in \{1,\ldots,n\}$*

$$\mathbb{P}\left(f_0(K,n)=k\right) = \binom{n}{k}\sum_{j=d+1}^{k}(-1)^{j+k}\binom{k}{j}\frac{\mathbb{E}\lambda_d(K,j)^{n-j}}{\lambda_d(K)^{n-j}}.$$

Proof: In the course of the previous proof we have shown

$$\binom{j+k}{k}\frac{\mathbb{E}\lambda_d(K,j)^k}{\lambda_d(K)^k} = \mathbb{E}\binom{j+k-f_0(K,j+k)}{k}$$

Putting $n := j+k$ we conclude

$$\binom{n}{j}\frac{\mathbb{E}\lambda_d(K,j)^{n-j}}{\lambda_d(K)^{n-j}} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{n-j}p_i, \;\; j=1,\ldots,n,$$

where $p_i := \mathbb{P}\left(f_0(K,n)=i\right)$. In matrix form this is

$$\begin{pmatrix} \binom{n}{1}\mathbb{E}\lambda_d(K,1)^{n-1}/\lambda_d(K)^{n-1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n-1}\mathbb{E}\lambda_d(K,n-1)/\lambda_d(K)^1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

where A is the $n\times n$-matrix whose (i,j)-th entry is $\binom{n-i}{n-j}$. The (j,i)-th entry of A^{-1} is $(-1)^{j+i}\binom{n-j}{n-i}$ (without proof). Hence

$$p_i = \mathbb{P}\left(f_0(K,n)=i\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}\binom{n-j}{n-i}\binom{n}{j}\frac{\mathbb{E}\lambda_d(K,j)^{n-j}}{\lambda_d(K)^{n-j}}.$$

Observing that $\binom{n-j}{n-i}=0$ for $j>i$, $\lambda_d(K,j)=0$ a.s. for $j<d+1$ and

$$\binom{n-j}{n-i}\binom{n}{j} = \frac{(n-j)!\; n!}{(n-i)!(i-j)!(n-j)!\; j!} = \frac{n!}{(n-i)!\; i!}\cdot\frac{i!}{(i-j)!\; j!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j},$$

we get the assertion. $\square$

Theorem 1.8. *Let $K \in \mathcal{K}'$.*

(i) There are constants $c_1, c_2 \in (0,\infty)$ (depending on d and K, not on n) such that

$$c_1\frac{\log^{d-1} n}{n} \leq \lambda_d(K) - \mathbb{E}\,\lambda_d(K,n) \leq c_2\; n^{-2/(d+1)}$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

(ii) If K is the unit ball, $K = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\}$, then there is an explicitly known constant $c_d \in (0,\infty)$ with

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda_d(K) - \mathbb{E}\,\lambda_d(K,n)\right)n^{2/(d+1)} = c_d.$$

We have $c_2 = 0.789$ and $c_3 = 0.729$.

(iii) If K is a polytope, there is a geometric-combinatorial quantity c_K of K such that

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda_d(K) - \mathbb{E}\,\lambda_d(K,n)\right)\frac{n}{\log^{d-1} n} = c_K.$$

The full proof of this theorem being too long, we turn to special cases.

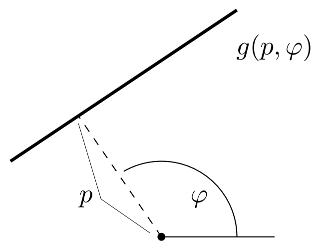
Lemma 1.9. *For $\varphi \in [0, 2\pi)$ and p consider the line $g(p,\varphi)$ having distance p from the origin whose normal pointing away from 0vector forms an angle φ with a fixed reference direction (measured counter-clockwise from the reference vector to the normal vector). Let $K \subseteq \mathbb{R}^2, K \in \mathcal{K}'$. If $g(p,\varphi)$ intersects K, it separates K in two parts. Let f denote the smaller of the Lebesgue measures of those two parts. Put $l := \lambda(g(p,\varphi) \cap K)$. Then we have*

$$\mathbb{E}\,\lambda_2(K,n) = \frac{\binom{n}{2}}{12\lambda_2(K)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{p^*(\varphi)} \left(1 - \frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} l^4 p \,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\varphi + \mathcal{O}(c^n)$$

as $n \to \infty$ for some $c < 1$, where

$$p^*(\varphi) = \max\{p > 0 \mid g(p,\varphi) \cap K \neq \varnothing\}.$$

Let K be a polytope. An edge of K is a line segment in the boundary of K joining two vertices of K. The system of all edges is denoted by $\mathcal{F}_1(K)$.



Lemma 1.10. *Let $K \subseteq \mathbb{R}^2$ be a polytope with $0 \in K$. For an edge $e \in \mathcal{F}_1(K)$ let h_e denote the distance of the affine hull of e to 0 and let l_e be the length of e. Then*

$$\lambda_2(K) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{F}_1(K)} h_e \cdot l_e.$$

Remark: This lemma is a special case of a result holding in arbitrary dimension without the assumption $0 \in K$. However this general result is technically more involved and requires e.g. signed distances.

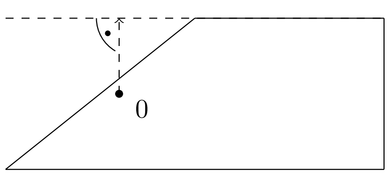


Abbildung 1.1: The distance between the affine hull of an edge and the origin may be smaller that the distance of the edge itself to the origin.

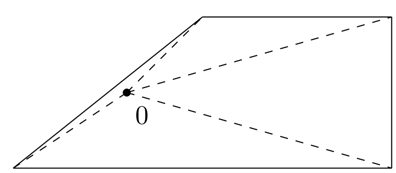


Abbildung 1.2: Partition the polygon into triangles.

Proof of the Lemma 1.10 The set K is the union of the triangles for which one side is an edge $e \in \mathcal{F}_1(K)$ and the opposite vertex is 0. These triangles have disjoint interiors. Hence

$$\lambda_2(K) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{F}_1(K)} h_e \cdot l_e.$$

Proof of the Lemma 1.9 Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent random points distributed uniformly within K. Let ϵ_{ij} be the indicator that $i \neq j$ and that there is an edge of $\operatorname{conv}\{X_1, \ldots, X_n\}$ with endpoints X_i and X_j. If $0 \in \operatorname{conv}\{X_1, \ldots, X_n\}$, then

$$\lambda_2(K,n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_{ij}\, ||X_i - X_j||\, H_{ij},$$

where

$$H_{ij} := \mid \langle X_i, n_{ij} \rangle \mid,$$

where n_{ij} is either of the unit vectors perpendicular to the line through X_i and X_j.
Since the random variables $X_1, \ldots, X_n$ are i.i.d., we get

$$\mathbb{E}\left[\lambda_2(K,n)\mathbf{1}_{\mathrm{conv}\{X_1,\ldots,X_n\}}(0)\right] = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\mathbb{E}\left[\epsilon_{12}\, ||X_1 - X_2||\, H_{12}\, \mathbf{1}_{\mathrm{conv}\{X_1,\ldots,X_n\}}(0)\right].$$

There is $c < 1$ with

$$\mathbb{E}\left[\lambda_2(K,n)\right] \in \frac{1}{2}\binom{n}{2}\mathbb{E}\big[\epsilon_{12}\, ||X_1 - X_2||\, H_{12}\big] + \mathcal{O}(c^n) \quad \textbf{(Exercise!)}\ .$$

Now $\epsilon_{ij} = 1$ if all points $X_3, \ldots, X_n$ lie on the same side of the line through X_1 and X_2. Let f and $\lambda_2(K) - f$ be the Lebesgue measures of the parts of K on both sides of this line, f being the smaller one. Then for a fixed realisation of X_1 and X_2 we have

$$\mathbb{P}\left(\epsilon_{12} = 1\right) = \left(\frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} + \left(\frac{\lambda_2(K) - f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2}.$$

Hence

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\epsilon_{12}\, ||X_1 - X_2||\, H_{12}\big] &= \mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} + \left(\frac{\lambda_2(K) - f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2}\right) ||X_1 - X_2||\, H_{12}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda_2(K) - f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} ||X_1 - X_2||\, H_{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \lambda_2(K)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda_2(K) - f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} ||X_1 - X_2||\, H_{12}\right] + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right).
\end{aligned}$$

Now introduce the following transformation

$$\psi : [0, 2\pi) \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

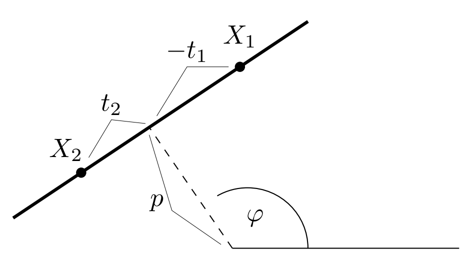
where a tupel (φ, p, t_1, t_2) is mapped to the points of $g(\varphi, p)$ corresponding to t_1 and t_2 in a fixed parameterisation (e.g. by arc-length, counter-clockwise w.r.t. the origin such that the point closest to the origin corresponds to parameter 0). Up to zero sets, this transformation is injective and surjective. It can be shown that

$$\mid det\, J(\psi) \mid_{(\varphi, p_1, t_1, t_2)} \mid = \mid t_1 - t_2 \mid.$$

Thus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda_2(K) - f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} ||\, X_1 - X_2\, ||\, H_{12}\right] &= \frac{1}{\lambda_2(K)^2}\int_{\psi^{-1}(K)} \left(1 - \frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} \mid t_1 - t_2 \mid p \mid t_1 - t_2 \mid \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \\
&= \frac{1}{\lambda_2(K)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{p^*(\varphi)}\int_{u(\varphi,p)}^{o(\varphi,p)}\int_{u(\varphi,p)}^{o(\varphi,p)} \mid t_1 - t_2 \mid^2 \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \cdot \left(1 - \frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} p\ \mathrm{d}p\, \mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}$$

where $u(\varphi, p)$ and $o(\varphi, p)$ denote the minimal and maximal parameter of $g(\varphi, p) \cap K$.



Now

$$\int_{u(\varphi,p)}^{o(\varphi,p)} \int_{u(\varphi,p)}^{o(\varphi,p)} (t_1-t_2)^2 \, \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2 = \frac{1}{6}\left(o(\varphi,p)-u(\varphi,p)\right)^4 = \frac{1}{6} l^4.$$

Altogether we have

$$\mathbb{E}\left[\lambda_2(K,n)\right] = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\frac{1}{\lambda_2(K)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{p^*(\varphi)} \frac{l^4}{6}\left(1-\frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} p \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\varphi + \mathcal{O}(c^n)$$

for some $c<1$, as claimed. □

Example: The square.
We are now going to evaluate the integral from the previous lemma for $K = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, the axisparallel square of side-length $a>0$ with midpoint at the origin.
By the symmetry of the square we have

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12}\binom{n}{2}\frac{1}{\lambda_2(K)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{p^*(\varphi)}\left(1-\frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} l^4 p \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\varphi \\
&\qquad = \frac{2}{3a^4}\binom{n}{2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{p^*(\varphi)}\left(1-\frac{f}{\lambda_2(K)}\right)^{n-2} l^4 p \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

From the exercises we know that the intersection points of $g(\varphi,p)$ with the boundary of K are

$$\begin{cases} (\frac{p}{\cos\varphi} - \frac{a}{2}\tan\varphi, \frac{a}{2}) \text{ and } (\frac{p}{\cos\varphi} + \frac{a}{2}\tan\varphi, -\frac{a}{2}) & \text{if } p \le p_*(\varphi) \\ (\frac{p}{\cos\varphi} - \frac{a}{2}\tan\varphi, \frac{a}{2}) \text{ and } (\frac{a}{2}, \frac{p}{\sin\varphi} - \frac{a}{2\tan\varphi}) & \text{if } p \in [p_*(\varphi), p^*(\varphi)], \end{cases}$$

where

$$p^*(\varphi) = \frac{a}{2}\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) \quad \text{and} \quad p_*(\varphi) = \frac{a}{2}\left(\cos\varphi - \sin\varphi\right).$$

Thus we get

$$f = \begin{cases} a\cdot\left(\frac{a}{2} - \frac{p}{\cos\varphi}\right) & \text{for } p\in[0,p_*(\varphi)] \\ \frac{\left(\frac{a}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)-p\right)^2}{2\sin\varphi\cos\varphi} & \text{for } p \in [p_*(\varphi), p^*(\varphi)], \end{cases}$$

and

$$l = \begin{cases} \frac{a}{\cos\varphi} & \text{for } p\in[0,p_*(\varphi)] \\ \frac{\frac{a}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi)-p}{\sin\varphi\cos\varphi} & \text{for } p \in [p_*(\varphi), p^*(\varphi)]. \end{cases}$$

Thus the integral is the sum of

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{2}{3a^4}\binom{n}{2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a/2(\cos\varphi-\sin\varphi)}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{p}{a\cos\varphi}\right)^{n-2}\left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)^4 p \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2}{3}\binom{n}{2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a/2(\cos\varphi-\sin\varphi)}\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{a\cos\varphi}\right)^{n-2}\frac{1}{(\cos\varphi)^4} p \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

and

$$J_2 = \frac{2}{3a^4}\binom{n}{2}\int_0^{\pi/4}\int_{p_*(\varphi)}^{p^*(\varphi)}\left(1-\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)-\frac{p}{a}\right)^2}{2\sin\varphi\cos\varphi}\right)^{n-2}\frac{\left(\frac{a}{2}\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)-p\right)^4}{\left(\sin\varphi\cdot\cos\varphi\right)^4} p \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}\varphi.$$

Some calculation yields

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{4}{3}\binom{n}{2}a^2\cdot\left[\frac{1}{n(n+1)}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2n(n-1)}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)\right] \\
&= \frac{4}{3}\frac{n(n-1)}{2}a^2\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2n(n-1)}\right]+\mathcal{O}(c^n) \\
&= \frac{1}{3}a^2\left(1-\frac{4}{n+1}\right)+\mathcal{O}(c^n)
\end{aligned}$$

for any $c > \frac{1}{2}$. An even more difficult calculation yields

$$J_2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{8a^2 \log n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Hence

$$\mathbb{E}\lambda_2(K,n) = J_1 + J_2 + \mathcal{O}(c^n) = a^2 - \frac{8a^2 \log n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

We finish this section by two results which are related to the previous ones, but which do not fully fall in the setup used up to now.

Theorem 1.11. *Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. random points in $\mathbb{R}^d$ whose distribution is symmetric w.r.t. 0 and assigns measure zero to any hyperplane through 0. Then*

$$\mathbb{P}\left(0 \notin \operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_n\}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}.$$

It is quite remarkable that this probability does not depend on the distribution of X_1 as long as the assumptions of this theorem are fulfilled. As we already know, other quantities, e.g. the expected number of vertices of $\operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_n\}$, do depend on the exact distribution.
For the proof of the theorem we need the following notion. Consider n hyperplanes $H_1, \dots, H_n \subseteq \mathbb{R}^d$ through 0 which are in general position. If $n \le d$, such hyperplanes are said to be in general position if their normal vectors are independent. If $n > d$, they are said to be in general position if any d of them are in general position. Let $C(n,d)$ denote the number of connected components of $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$.

Lemma 1.12. *The number $C(n,d)$ is independent of the choice of the hyperplanes $H_1, \dots, H_n$ as long as they pass through 0 and are in general position. We have*

$$C(n,d) = 2\sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k}.$$

Without proof.

Lemma 1.13. *Let $K \subseteq \mathbb{R}^d$ be a closed convex set and $x \in \mathbb{R} \setminus K$. Then there is a vector $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ with*

$$\langle k, u \rangle > \langle x, u \rangle$$

for all $k \in K$.

Without proof.
Proof of the Theorem:
Let $\varPhi$ be the distribution of X_1. Then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(0 \notin \operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_n\}\right) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \mathbf{1}_{\operatorname{conv}\{x_1,\dots,x_n\}}(0) \;\mathrm{d}\varPhi(x_1) \dots \mathrm{d}\varPhi(x_n) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} 1 - \mathbf{1}_{\operatorname{conv}\{\epsilon_1 x_1,\dots,\epsilon_n x_n\}}(0) \;\mathrm{d}\varPhi(x_1) \dots \mathrm{d}\varPhi(x_n)
\end{aligned}$$

for any $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, since $\varPhi$ is invariant under reflection at the origin.
Hence

$$\mathbb{P}\left(0 \notin \operatorname{conv}\{X_1, \dots, X_n\}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_i \in \{-1,1\}} \left(1 - \mathbf{1}_{\operatorname{conv}\{\epsilon_1 x_1,\dots,\epsilon_n x_n\}}(0)\right) \mathrm{d}\varPhi(x_1) \dots \mathrm{d}\varPhi(x_n).$$

We notice that $\mathbf{1}_{conv\{\epsilon_1 x_1,\ldots,\epsilon_n x_n\}}(0) = 0$ if and only if there is a vector $y \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ with $\langle \epsilon_i x_i, y\rangle > 0$ for $i = 1,\ldots,n$, i.e. if and only

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{R}^d \mid \langle \epsilon_i x_i, Z\rangle > 0\} \neq \varnothing.$$

Notice that for $\Phi \otimes \ldots \Phi$- a.a. $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d$ of the points $x_1,\ldots,x_n$ are linearly independent. (This is obtained by an easy induction using the assumption that every hyperplane through 0 has mass zero under Φ).
Now the non-empty sets of the form $Z_\epsilon := \bigcap_{i=1}^n \{z \in \mathbb{R}^d \mid \langle x_i\epsilon_i, z\rangle > 0\}$, $\epsilon = \{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\} \in \{-1,1\}^n$ are precisely the connected components of $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$, where $H_i := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle y, x_i\rangle = 0\}$ is the hyperplane through 0 orthogonal to x_i. The sets Z_ϵ are connected subsets of $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ belongs to one of the sets Z_ϵ, we have found all connected components.
Hence $C(n,d)$ of the sets Z_ϵ are non-empty and thus

$$\sum_{\epsilon_i \in \{-1,1\}} \left(1 - \mathbf{1}_{conv\{\epsilon_1 x_1,\ldots,\epsilon_n x_n\}}(0)\right) = C(n,d).$$

So

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon_i \in \{-1,1\}} \left(1 - \mathbf{1}_{conv\{\epsilon_1 x_1,\ldots,\epsilon_n x_n\}}(0)\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n-1}{k},$$

which implies the assertion. □

Let $\kappa_d := \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ be the Lebesgue measure of the d-dimensional unit ball $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^d$ and let $\omega = d_{\kappa_d} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ be the area of the unit sphere $S^{d-1} := \{u \in \mathbb{R}^d \mid ||u|| = 1\}$.

Lemma 1.14. *Let $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ be a measurable function with $\int_0^\infty \mid f(r) \mid r^{d-1}\mathrm{d}r < \infty$. Then*

$$\int_0^\infty f(\|x\|)\mathrm{d}x = \omega_d \int_0^\infty f(r) r^{d-1}\mathrm{d}r.$$

Without proof.
Let $\nabla_q(x_1,\ldots,x_q)$ for $q \in \{1,\ldots,d\}$ and $x_1,\ldots,x_q \in \mathbb{R}^d$ be the q-dimensional Lebesgue measure of the parallelepiped spanned by $x_1,\ldots,x_q$,

$$\nabla_q(x_1,\ldots,x_q) := \lambda_q\left(\left\{\sum_{i=1}^q \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in [0,1], i = 1,\ldots,q\right\}\right).$$

Theorem 1.15. *For $d \geq 1$, $q \in \{1,\ldots,d\}$ let $X_1 \ldots, X_q$ be independent random points distributed uniformly within the unit ball $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^d$. Then, for $k \geq 1$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\nabla_q(X_1,\ldots,X_q)^k\right] &= \frac{\kappa_{d+k}^q}{\kappa_d^q} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\omega_{d-j}}{\omega_{d+k-j}} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^q}{\Gamma(\frac{d+k}{2}+1)^q} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\Gamma(\frac{d+k-j}{2})}{\Gamma(\frac{d-j}{2})}.\end{aligned}$$

Proof: We have to show

$$\begin{aligned}I(d,q,k) &:= \int_{B_1(0)} \cdots \int_{B_1(0)} \nabla_q(x_1,\ldots,x_q)^k \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_q \\ &= \kappa_{d+1}^q \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\omega_{d-1}}{\omega_{d+k-j}}.\end{aligned}$$

First let $q = 1$. Then $\nabla_1(x) = ||x||$ and thus

$$I(d,1,k) = \int_{B_1(0)} ||x||^k \mathrm{d}x = \omega_d \int_0^1 r^k r^{d-1}\mathrm{d}r = \frac{\omega_d}{d+k}.$$

So assume now $q \geq 2$. Then

$$I(d,q,k) = \int_{B_1(0)} \cdots \int_{B_1(0)} \left(d\left(x_1, lin\{x_2,\ldots,x_q\}\right) \cdot \nabla_{q_1}\left(x_2,\ldots,x_q\right)\right)^k \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_q$$

Since $\int_{B_1(0)} d(x_1, L)\mathrm{d}x_1$ is independent of L as long as $L \subseteq \mathbb{R}^d$ is a $(q-1)$-dimensional linear subspace, we obtain

$$I(d,q,k) = I(d,q-1,k) \int_{B_1(0)} d(x_1,L)\mathrm{d}x_1$$

for a fixed $(q-1)$-dimensional subspace $L \subseteq \mathbb{R}^d$.
Now

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} d(x_1,L)\mathrm{d}x_1 &= \int_{L^\perp \cap B_1(0)} \int_{(L+x)\cap B_1(0)} ||x||^k \lambda_{L+x}(dy)\lambda_{L^\perp}(dx) \\
&= \int_{L^\perp \cap B_1(0)} \left(1-||x||^2\right)^{(q-1)/2} \kappa_{q-1}||x||^k \lambda_{L^\perp}(dx) \\
&= \kappa_{q-1}\omega_{d-q+1} \int_0^1 \left(1-r^2\right)^{(q-1)/2} r^k r^{d-q} \mathrm{d}r \\
&= \kappa_{q-1} \frac{\omega_{d-q+1}}{\omega_{d-q+k+1}} \int_{B_1(0)\subseteq \mathbb{R}^{d-q+k+1}} \left(1-||x||^2\right)^{(q-1)/2} \mathrm{d}x \\
&= \kappa_{d+k} \frac{\omega_{d-q+1}}{\omega_{d-q+k+1}}.
\end{aligned}$$

Applying this inductively yields

$$I(d,q,k) = \prod_{j=1}^{q-1} \kappa_{d+k} \frac{\omega_{d-j}}{\omega_{d+k-j}} I(d,1,k) = \kappa_{d+k}^q \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\omega_{d-j}}{\omega_{d+k-j}}. \quad \square$$

1.2 Das starke Gesetz großer Zahlen

Definition 1.16. *Ein Zufallsvektor ξ in $\mathbb{R}^d$ heißt (messbare) Auswahl einer zufälligen abgeschlossenen Menge Z in $\mathbb{R}^d$, falls $\mathbb{P}(\xi \in Z) = 1$.*

Bsp.: Zufällige abgeschlossene Mengen, die die gleichen Verteilungen, aber unterschiedliche Auswahlen haben.

1) Sei $Z = \{0,1\}$ mit Wahrscheinlichkeit 1. Falls Z auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit trivialer σ-Algebra $(\Omega, \{\varnothing, \Omega\}, \mathbb{P})$ definiert ist, so erfüllt jede Auswahl ξ von Z entweder $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1$ oder $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1$. Ist Z hingegen auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{|[0,1]})$ definiert, so ist jeder Wert aus $[0,1]$ für $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 1)$ denkbar.

2) Betrachte die Zufallsvariablen $X(\omega) = \omega$ und

$$X^{'}(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{für } \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2\omega - 1 & \text{für } \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{|[0,1]}\right)$ Setze $Z = [-X, X]$ und $Z^{'} = [-X^{'}, X^{'}]$. Dann ist $X \overset{d}{=} X^{'}$ und somit (ohne Beweis) $Z \overset{d}{=} Z^{'}$.

Nun enthält $Z^{'}$ eine auf $[-1,1]$ gleichverteilte Auswahl, nämlich

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{für } \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 - 2\omega & \text{für } \omega \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Hingegen enthält Z keine auf $[-1,1]$ gleichverteilte Auswahl (ohne Beweis).

Theorem 1.17. *Seien Z und $Z^{'}$ zwei zufällige abgeschlossene Mengen auf atomlosen Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $(\Omega^{'}, \mathcal{A}^{'}, \mathbb{P}^{'})$ mit $Z \stackrel{d}{=} Z^{'}$. Für jede Auswahl ξ von $Z^{'}$ gibt es eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Auswahlen von Z, die in Verteilung gegen ξ konvergiert.*

Um diesen Satz zu beweisen, führen wir zunächst die Prokhorov-Metrik ein.

Definition 1.18. *Es bezeichne $\mathcal{W}(\mathbb{R}^d)$ den Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße des $\mathbb{R}^d$. Dann heißt die Abbildung*

$$\mathfrak{p} : \mathcal{W}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{W}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R},$$
$$(P, Q) \mapsto \inf\{\epsilon > 0 \mid P(B) \leq Q(B_{\oplus\epsilon}) + \epsilon,\ \ Q(B) \leq P(B_{\oplus\epsilon}) + \epsilon \text{ für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\},$$

Prokhorov-Metrik.

Dabei ist

$$B_{\oplus\epsilon} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \ \|x - y\| \leq \epsilon \text{ für ein } y \in B\}.$$

Sind $X \sim P$ und $Y \sim Q$ zwei Zufallsvektoren, so schreiben wir statt $\mathfrak{p}(P, Q)$ auch $\mathfrak{p}(X, Y)$.

Theorem 1.19. *(i) Die Prokhorov-Metrik $\mathfrak{p} : \mathcal{W}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{W}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik.*

(ii) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$ und (P_n) eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{p}(P_n, P) = 0$ genau dann, wenn P_n schwach gegen P konvergiert.

ohne Beweis.

Lemma 1.20. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein atomfreier Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{A}$ und $c_1, \ldots, c_n \geq 0$ mit $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) \geq \sum_{i\in I} c_i$ für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i$. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{A}$ mit $T_i \subseteq S_i$ und $\mathbb{P}(T_i) = c_i$.*

ohne Beweis.

Beispiel: Wir beweisen Satz 1.17 zunächst unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $(\Omega^{'}, \mathcal{A}^{'}, \mathbb{P}^{'})$ nicht atomlos, sondern diskret sind, und dass die Zufallsvariablen Z und Z' injektiv sind.

Um eine Auswahl η von Z mit $\eta \stackrel{d}{=} \xi$ zu definieren, gehen wir wie folgt vor:

1. Für jedes $\omega \in \Omega$ bestimmen wir das Element $\alpha(\omega) \in \Omega'$ mit $Z(\omega) = Z'(\alpha(\omega))$.
2. Wir setzen $\eta(\omega) := \xi(\alpha(\omega))$.

Nun ist η eine Auswahl von Z und für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist

$$\mathbb{P}(\eta \in B) = \sum_{\omega:\eta(\omega)\in B} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega:\xi(\alpha(\omega))\in B} \mathbb{P}'(\{\alpha(\omega)\}) = \mathbb{P}'(\xi \in B),$$

denn wegen $Z \stackrel{d}{=} Z'$ und der Injektivität von Z, Z' gilt $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}'(\{\alpha(\omega)\})$ für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis des Satzes 1.17: Sei $\epsilon > 0$. Es reicht zu zeigen, dass es eine Auswahl η von Z gibt mit $\mathfrak{p}(\xi, \eta) < \epsilon$.
Es gibt eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{P}(\xi \notin K) < \epsilon$. Setze $B_1 := \mathbb{R}^d \setminus K$ und wähle eine disjunkte Partition $B_2, \ldots, B_n$ von K in Mengen, deren Durchmesser höchstens ϵ ist. Setze $c_i := \mathbb{P}(\xi \in B_i)$ und
$A_i := \{Z \cap B_i \neq \varnothing\},\ \ i = 1, \ldots, n$. Für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ist dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(Z \cap \bigcup_{i\in I} B_i \neq \varnothing\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z^{'} \cap \bigcup_{i\in I} B_i \neq \varnothing\right) \\
&\geq \mathbb{P}\left(\xi \in \bigcup_{i\in I} B_i\right) \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(\xi \in B_i) \\
&= \sum_{i\in I} c_i.
\end{aligned}$$

Außerdem

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(Z^{'} \neq \varnothing\right) = 1 = \mathbb{P}\left(\xi \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

denn die vorausgesetzte Existenz von ξ impliziert $\mathbb{P}\left(Z^{'} \neq \varnothing\right) = 1$. Nach Lemma 1.20 gibt es nun messbare $A_i^{'} \subseteq A_i$, $i = 1, \dots, n$, mit

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i^{'}\right) = \sum_{i \in I} c_i$$

für alle $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.
Für $\omega \in A_i^{'}$ ist $Z \cap B_i \neq \varnothing$. Somit gibt es eine messbare Funktion $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{P}(\eta \in Z) = 1$ und $\eta \in B_i$, falls $A_i^{'}$ (der Nachweis der Messbarkeit wird übergangen). Es gilt $\mathfrak{p}(\xi, \eta) < \epsilon$. (Übung!) □

Es bezeichne $\mathcal{F}^{'} = \mathcal{F} \setminus \{\varnothing\}$ das System der nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichne *cl* A den Abschluss von A.

Lemma 1.21. *Eine Abbildung $Z : \Omega \to \mathcal{F}^{'}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist genau dann messbar, wenn es eine abzählbare Menge $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von Auswahlen von Z gibt mit*

$$\mathbb{P}\left(cl(\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = Z\right) = 1.$$

ohne Beweis.

Definition 1.22. *Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum*

(i) Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$\mathcal{L}^p(\Omega; E) := \{X : \Omega \to E \mid X \text{ ist messbar und } \mathbb{E}\,\|X\|^p < \infty\}$$

(ii) Für $p = \infty$ ist

$$\mathcal{L}^p(\Omega; E) := \{X : \Omega \to E \mid X \text{ ist messbar und } \exists\, c > 0 : \mathbb{P}(\|X\| < c) = 1\}$$

Definition 1.23. *Eine Auswahl ξ heißt p-integrierbar, falls $\xi \in \mathcal{L}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Definition 1.24. *Die Familie aller Auswahlen einer zufälligen abgeschlossenen Menge Z bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(Z)$. Die Familie aller p- integrierbaren Auswahlen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}^p(Z)$.*

Bem.: Es ist

$$\mathcal{S}^p(Z) = \mathcal{S}(Z) \cap \mathcal{L}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$$

Theorem 1.25. *Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $\mathcal{S}^p(Z) \neq \varnothing$ genau dann, wenn*

$$\alpha := d(0, Z) := \inf\{||x|| \mid x \in Z\} \in \mathcal{L}^p(\Omega; \mathbb{R}).$$

Beweis: Falls $\mathbb{P}(Z = \varnothing) > 0$, dann ist $\alpha \notin \mathcal{L}^p(\Omega; \mathbb{R})$ und $\mathcal{S}^p(Z) = \varnothing$.
Andernfalls ist $Y := \{x \in Z \mid ||x|| = \alpha\}$ messbar (ohne Beweis) und daher eine zufällige abgeschlossene Menge, die f.s. nicht-leer ist. Nach Lemma 1.21 gibt es eine messbare Auswahl ξ von Y. Nun ist $\xi \in \mathcal{S}(Z)$ und $\mathbb{E}||\xi||^p = \mathbb{E}\alpha^p < \infty$. Also $\xi \in \mathcal{L}^p\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$ und somit $\xi \in \mathcal{S}^p(Z)$.
Die umgekehrte Richtung ist trivial. □

Theorem 1.26. *Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$.*

(i) Falls $\mathcal{S}^p(Z) \neq \varnothing$, dann existiert eine abzählbare Teilmenge $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}^p(Z)$ mit

$$\mathbb{P}\left(cl\left(\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right) = Z\right) = 1.$$

(ii) Falls $\mathcal{S}^p(Z) = \mathcal{S}^p(Z^{'}) \neq \varnothing$, wobei die Gleichheit von Auswahlen im fast sicheren Sinn verstanden wird, dann ist $Z = Z^{'}$ fast sicher.

Beweis: (i) Wir wissen, dass es eine abzählbare Menge $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}(Z)$ gilt mit

$$\mathbb{P}\left(cl\left(\{\eta_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right) = Z\right) = 1.$$

Weiter haben wir vorausgesetzt, dass es $\xi \in \mathcal{S}^p(Z)$ gibt. Definiere nun

$$\xi_{n,m} := \eta_n \mathbf{1}_{[m-1,m)}\left(||\eta_n||\right) + \xi \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[m-1,m)}\left(||\eta_n||\right).$$

Nun sind die $\xi_{n,m}$ messbar mit $\mathbb{P}\left(\xi_{n,m} \in Z\right) = 1$, also $\xi_{n,m} \in \mathcal{S}(Z)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Weiter ist

$$\mathbb{E}\|\xi_{n,m}\|^p \leq m^p + \mathbb{E}||\xi||^p < \infty,$$

also $\xi_{n,m} \in \mathcal{S}^p(Z)$. Es ist

$$\mathbb{P}\left(cl\left(\{\xi_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}\right) = Z\right) = 1$$

und $\{\xi_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ist eine abzählbare Menge.
(ii) Sei $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{S}^p(Z)$ die in Teil (i) konstruierte Teilmenge. Dann gilt

$$Z = cl\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq cl\{\xi \mid \xi \in \mathcal{S}^p(Z^{'})\} = Z^{'}$$

fast sicher. Ebenso $Z^{'} \subseteq Z$, also $Z = Z^{'}$. □
Bem.: Der kürzere Beweis von Teil (ii),

$$Z = cl\left(\{\xi \mid \xi \in \mathcal{S}^p(Z)\}\right) = cl(\{\xi \mid \xi \in \mathcal{S}^p(Z^{'})\}) = Z^{'}$$

fast sicher, ist falsch (warum?).

Definition 1.27. *Sei X eine zufällige abgeschlossene Menge. Dann heißt*

$$\mathbb{E}X := \{\mathbb{E}\xi \mid \xi \in \mathcal{S}^1(X)\}$$

Aumann-Integral oder Auswahl-Erwartung von X.

Bsp.: Betrachte wieder die zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}\left(Z = \{0, 1\}\right) = 1$.
Hat der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum die Form $(\Omega, \{\varnothing, \Omega\}, \mathbb{P})$, so erfüllt jede Auswahl ξ von Z entweder $\mathbb{P}(\xi = 0) = 1$ oder $\mathbb{P}(\xi = 1) = 1$. Dann ist $\mathbb{E}\xi = 0$ bzw. $\mathbb{E}\xi = 1$, also $\mathbb{E}Z = \{0, 1\}$.
Ist hingegen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ atomfrei, so gibt es für jede Zahl $p \in [0, 1]$ eine Auswahl ξ von Z mit

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = p$$

und damit $\mathbb{E}\xi = p$. Also $\mathbb{E}Z = [0, 1]$.

Theorem 1.28. *Sei Z eine zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

(i) $\mathbb{E}Z$ ist abgeschlossen.

(ii) Falls $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ atomfrei ist, so ist $\mathbb{E}Z$ konvex und $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[\text{conv } Z]$.

ohne Beweis.

Definition 1.29. *Eine zufällige abgeschlossene Menge Z heißt integrierbar beschränkt, falls*

$$\mathbb{E} \sup\{||x|| \mid x \in Z\} < \infty.$$

Bem.:

(i) Eine integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Menge ist fast sicher kompakt.

(ii) Für eine integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ gilt $\mathcal{S}^1(Z) = \mathcal{S}(Z)$.

Definition 1.30. *Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt die durch*

$$h(K, v) := \max\{\langle x, v\rangle \mid x \in K\}, v \in \mathbb{R}^d,$$

definierte Funktion Stützfunktion.

Theorem 1.31. *Sei Z eine integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}h(Z, v) = h(\mathbb{E}Z, v).$$

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d$. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{E}Z$ gibt es eine Auswahl ξ von Z mit $\mathbb{E}\xi = x$. Also

$$\langle x, v\rangle = \mathbb{E}\langle \xi, v\rangle \leq \mathbb{E}h(Z, v)$$

Indem wir das Maximum über alle $x \in \mathbb{E}Z$ nehmen, erhalten wir

$$h(\mathbb{E}Z, v) \leq \mathbb{E}h(Z, v).$$

Andererseits ist die zufällige abgeschlossene Menge

$$Y = \{x \in Z \mid \langle x, v\rangle = h(Z, v)\}$$

nicht-leer. Also gibt es eine messbare Auswahl ξ von Y und diese ist auch Auswahl von Z. Somit ist

$$\mathbb{E}h(Z, v) = \mathbb{E}\langle \xi, v\rangle = \langle \mathbb{E}\xi, v\rangle \leq h(\mathbb{E}Z, v),$$

da $\mathbb{E}\xi \in \mathbb{E}Z$. Also $\mathbb{E}h(Z, v) = h(\mathbb{E}Z, v)$. □

Bem.: Unter der Voraussetzungen, dass der zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ atomfrei ist, kann der vorangegangene Satz auch als Definition der Aumann-Erwartung benutzt werden. Hierfür folgert man aus Resultaten der Konvexgeometrie, dass es für jede integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ genau eine kompakte und konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$h(K, v) = \mathbb{E}h(Z, v), \ \ v \in \mathbb{R}^d.$$

Definition 1.32. *(i) Für zwei Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Minkowski-Summe oder elementweise Summe definiert durch*

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(ii) Für eine Zahl $\lambda > 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^d$ setzt man

$$\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}.$$

Lemma 1.33. *Seien $K_1, \ldots, K_n \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $\lambda > 0$. Dann ist*

$$h\big(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n K_i, v\big) = \lambda \sum_{i=1}^n h\big(K_i, v\big)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} h\big(\lambda \cdot \sum_{i=1}^n K_i, v\big) &= \max\{\langle \lambda \sum_{i=1}^n a_i, v\rangle \mid a_i \in K_i, i = 1, \ldots, n\} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \max\{\langle a_i, v\rangle \mid a_i \in K_i\} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n h(K_i, v) \end{aligned}$$

Definition 1.34. *Es bezeichne $\mathcal{C}'$ das System der nicht-leeren kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Dann ist die Hausdorff-Metrik definiert durch*

$$d_H : \mathcal{C}' \times \mathcal{C}' \to \mathbb{R},\ (K, L) \mapsto \inf\{\epsilon > 0 \mid K \subseteq L_{\oplus\epsilon} \text{ und } L \subseteq K_{\oplus\epsilon}\}.$$

Theorem 1.35. *Die Hausdorff-Metrik ist eine Metrik.*

ohne Beweis.

Theorem 1.36. *(i) Seien $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist*

$$d_H(K, L) \geq \max\{|h(K, v) - h(L, v)| \mid ||v|| = 1\}.$$

(ii) Sind K und L darüberhinaus konvex, so gilt Gleichheit.

Beweis: (i) Da $h(K, v)$ und $h(L, v)$ stetig in v sind (ohne Beweis), wird das Maximum tatsächlich angenommen. Sei v_0 die Maximalstelle und o.B.d.A

$$\triangle := h(K, v_0) - h(L, v_0) > 0.$$

Dann gibt es $k \in K$ mit

$$\langle k, v_0\rangle \geq \langle l, v_0\rangle + \triangle$$

für alle $l \in L$. Insbesondere folgt $||k - l|| \geq \triangle$ für alle $l \in L$ und für alle $\epsilon < \triangle$ ist $K \notin L_{\oplus\epsilon}$. Also $d_H(K, L) \geq \triangle$.
(ii) Setze $\triangle := d_H(K, L)$. Durch ein Kompaktheitsargument kann man zeigen, dass es $k \in K$ und $l_0 \in L$ mit $||k - l|| \geq \triangle$ für alle $l \in L$ und

$$||k - l_0|| = \triangle$$

gibt, nachdem ggf. die Rollen von K und L vertauscht wurden. Sei $v_0 := \frac{k - l_0}{||k - l_0||}$ der von l_0 in Richtung k zeigende Einheitsvektor. Wir wollen

$$h(K, v_0) - h(L, v_0) \geq \triangle$$

zeigen. Nimm also an, es gibt $l_1 \in L$ mit

$$\langle k, v_0\rangle - \langle l_1, v_0\rangle < \triangle.$$

Auf Grund der Konvexität von L liegen alle Punkte $l_\lambda := \lambda l_1 + (1 - l_0)\lambda \in L, \lambda \in [0, 1]$. Aber es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} ||k - l_\lambda||^2 = 2\langle k - l_\lambda, l_1 - l_0\rangle < 0$$

für hinreichend kleine λ. Also gibt es $\lambda > 0$ mit

$$||k - l_\lambda||^2 < ||k - l_0||^2,$$

ein Widerspruch. Somit

$$\max\{|h(K, v) - h(L, v)|\ ||v|| = 1\} \geq \triangle.$$

□

Es bezeichne

$$\operatorname{diam} K := \max\{\|x - y\| \mid x, y \in K\}$$

den Durchmesser einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Theorem 1.37 (Shapley - Folkman - Starr)**.** *Seien $K_1, \ldots, K_n \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist*

$$d_H(K_1 + \cdots + K_n, \operatorname{conv}(K_1 + \cdots + K_n)) \leq \sqrt{d} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \operatorname{diam} K_i.$$

ohne Beweis.

Theorem 1.38 (Starkes Gesetz großer Zahlen für zufällige abgeschlossene Mengen)**.**
Seien $Z_1, Z_2, \ldots$ u.i.v. integrierbar beschränkte zufällige abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^d$ auf einem atomlosen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Setze $S_n := \sum_{i=1}^n Z_i,\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d_H\big(\frac{1}{n} S_n, \mathbb{E}Z_1\big) \xrightarrow{f.s.} 0,\ n \to \infty.$$

Beweis: Wir zeigen den Satz nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass entweder

(i) Die Mengen $Z_1, Z_2, \ldots$ f.s. konvex sind, oder

(ii) Es sogar eine deterministische Schranke $s > 0$ mit $\operatorname{diam} Z_1 < s$ f.s. gibt.

Es gilt gleichmäßig für alle $v \in \mathbb{R}^d$ mit $||v|| = 1$

$$h\big(\frac{1}{n}S_n, v\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(Z_i, v) \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}h(Z_1, v) = h(\mathbb{E}Z_1, v).$$

Der Grenzübergang folgt dabei punktweise aus dem starken Gesetz großer Zahlen aus Elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie; der Nachweis der Gleichmäßigkeit wird übergangen. Die letzte Gleichheit folgt aus Satz 1.31.
Unter (i) folgt

$$d_H\big(\frac{1}{n}S_n, \mathbb{E}Z_1\big) = \max\Big\{|h\big(\frac{1}{n}S_n, v\big) - h\left(\mathbb{E}Z_1, v\right)| \mid ||v|| = 1\Big\} \xrightarrow{f.s.} 0, \;\; n \to \infty.$$

Für den Beweis im Falle (ii) zeigt man zunächst $h(K, v) = h(\operatorname{conv} K, v)$ für kompakte $K \subseteq \mathbb{R}^d$ und $v \in \mathbb{R}^d$ sowie $d_H(\lambda K, \lambda L) = \lambda \cdot d_H(K, L)$ für $\lambda > 0$ und kompakte $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$. Es folgt

$$\begin{aligned} d_H\big(\frac{1}{n}S_n, \mathbb{E}Z_1\big) &\le d_H\big(\frac{1}{n}S_n, \frac{1}{n}\operatorname{conv}(S_n)\big) + d_H\big(\frac{1}{n}\operatorname{conv}(S_n), \mathbb{E}Z_1\big) \\ &\le \frac{\sqrt{d}}{n} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \operatorname{diam} Z_i + \max\Big\{|h\big(\frac{1}{n}S_n, v\big) - h\left(\mathbb{E}Z_1, v\right)| \mid ||v|| = 1\Big\} \xrightarrow{f.s.} 0, \;\; n \to \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Kapitel 2

Zufällige Mosaike

2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Definition 2.1. *Eine abgeschlossene Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^d$ *heißt Mosaik, falls*

(a) jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von* $\mathbb{R}^d \setminus M$ *schneidet,*

(b) die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus M$ *beschränkt und konvex sind*

(c) M *keine inneren Punkte hat,* $\operatorname{int} M = \varnothing$.

Die Abschlüsse der Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus M$ *heißen Zellen.*

Lemma 2.2. *Die Zellen eines Mosaiks sind konvexe Polytope, d.h. kompakte Mengen, die sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume*

$$H^+_{v,c} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v\rangle \geq c\}, \;\; v \in S^{d-1}, \;\; c \in \mathbb{R},$$

darstellen lassen.

Lemma 2.3. *Seien* $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ *zwei konvexe Mengen mit* $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} L = \varnothing$. *Dann gibt es* $v \in S^{d-1}$, $c \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\begin{aligned} \langle k, v\rangle &\geq c \text{ für alle } k \in K \text{ und} \\ \langle l, v\rangle &\leq c \text{ für alle } l \in L. \end{aligned}$$

Man sagt, die Hyperebene $H_{v,c} := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v\rangle = c\}$ trennt K und L.
Ohne Beweis.

Lemma 2.4. *Sei* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *konvex,* $x \in K$, $y \in \operatorname{int} K$, $\lambda \in [0, 1)$. *Dann ist*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \;\; \in \operatorname{int} K.$$

Ohne Beweis.
Beweis von Lemma 2.2:
Sei M ein Mosaik und K eine Zelle von M. Wegen der Lokal-Endlichkeit (Eigenschaft (a) aus der Definition des Mosaiks) gibt es nur endlich viele Zellen $K_0, \ldots, K_n$ mit $K \cap K_i \neq \varnothing$, o.B.d.A. $K_0 = K$.
Wegen $\operatorname{int} K \cap \operatorname{int} K_i = \varnothing$ liefert Lemma 2.3, dass es eine Hyperebene H_i gibt, die K und K_i trennt. Es sei H_i^+ der von H_i begrenzte abgeschlossene Halbraum mit $K \subseteq H_i^+$.
Wir behaupten, dass

$$K = \bigcap_{i=1}^{n} H_i^+. \tag{2.1}$$

Die Inklusion $K \subseteq \bigcap_{i=1}^n H_i^+$ ist trivial. Sei also $x \in \bigcap_{i=1}^n H_i^+$. Angenommen $x \notin K$. Es gibt, da eine Zelle der Abschluss einer offenen Menge ist, einen Punkt $y \in \operatorname{int} K$. Nun enthält $[x, y]$ einen Randpunkt x' von K. Wegen $x' \in [x, y] \setminus \{x\}$ folgt aus Lemma 2.4, dass $x' \in \operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^n H_i^+\right)$.

Weil $x' \in \operatorname{bd} K$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d \setminus K$, die gegen x' konvergiert. Weil M keine inneren Punkte hat, können wir o.B.d.A. $x_n \notin M$ annehmen. Wegen der Lokal-Endlichkeit liegen fast alle, o.B.d.A. alle Folgenglieder in $\bigcup_{i=1}^n K_i$. Also enthält eine der Mengen K_{i_0} für ein $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ unendlich viele Folgenglieder. Da K_{i_0} abgeschlossen ist, folgt $x' \in K_{i_0}$ und $x' \notin \operatorname{int} H_{i_0}^+$. Dies liefert den gewünschte Widerspruch und wir haben $x \in K$ und somit (2.1) gezeigt. □

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop. Eine Teilmenge $F \subseteq \operatorname{bd} P$ heißt Seite von P, falls es eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $F = P \cap H$ gibt. Falls F darüber hinaus k-dimensional, $k \in \{0,\dots,d-1\}$ ist, dann heißt F k-Seite. Man nennt 0-Seiten auch Ecken, 1-Seiten Kanten und $(d-1)$-Seiten Facetten.
Für ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichne $\mathcal{F}_k(P)$, $k = 0,\dots,d-1$, die Menge der k-Seiten von P. Ergänzend setzen wir $\mathcal{F}_d(P) := \{P\}$, das heißt wir betrachten das Polytop selbst als einzige d-Seite von P.
Für ein Mosaik $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $\mathcal{C}(M)$ die Menge aller Zellen von M. Wir setzen

$$\mathcal{F}_k(M) := \bigcup_{P\in\mathcal{C}(M)} \mathcal{F}_k(P),\ \ k = 0,\dots,d-1.$$

Ein Mosaik heißt seitentreu, falls für zwei Zellen P_1 und P_2 von M entweder $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ oder $P_1 \cap P_2$ sowohl eine Seite von P_1 als auch eine Seite von P_2 ist.

Definition 2.5. *(i) Eine zufällige abgeschlossene Menge X in $\mathbb{R}^d$, die fast sicher ein Mosaik ist, heißt zufälliges Mosaik.*

(ii) Ein zufälliges Mosaik heißt seitentreu, wenn es fast sicher seitentreu ist.

2.2 Markierte Punktprozesse

Es bezeichne # M die Anzahl der Elemente einer Menge M.

Definition 2.6. *Eine zufällige abgeschlossene Menge X in $\mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{P}\left(\#\left(X \cap C\right) < \infty\right) = 1$ für alle $C \in \mathcal{C}$ heißt (einfacher) Punktprozess.*

Theorem 2.7. *Sei X ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine Folge $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^d$, so dass*

$$X = \{\xi_1,\dots,\xi_k\},\ \text{falls } \#X = k,$$
$$X = \{\xi_1,\xi_2,\dots\},\ \text{falls } \#X = \infty,$$

fast sicher.

Ohne Beweis.

Definition 2.8. *Sei $(M,\mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Sei $X^0 = \{\xi_1,\xi_2,\dots\}$ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ und (μ_i) eine Folge von M-wertigen Zufallsvariablen. Dann ist*

$$X = \{(\xi_1,\mu_1),(\xi_2,\mu_2),\dots\}$$

ein markierter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M.

Definition 2.9. *Das Intensitätsmaß eines markierten Punktprozesse X in $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M ist das durch*

$$\Lambda(B) = \mathbb{E}\,\#\ (X \cap B)\,,\ \ B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) \otimes \mathcal{M}$$

definierte Maß.

Theorem 2.10 (Satz von Campbell)**.** *Sei X ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M. Sei Λ sein Intensitätsmaß und $f : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die entweder $f(x,m) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $m \in M$ oder*

$$\int_{\mathbb{R}^d\times M} |f(x,m)|\,\Lambda(d(x,m)) < \infty$$

erfüllt. Dann gilt

$$\mathbb{E}\sum_{(x,m)\in X} f(x,m) = \int_{\mathbb{R}^d\times M} f(x,m)\,\Lambda(d(x,m)).$$

ohne Beweis.

Definition 2.11. *Ein markierter Punktprozess X auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M heißt stationär, falls*

$$X + v \overset{d}{=} X, \;\; v \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $X + v := \{(x_1 + v, x_2) \in \mathbb{R}^d \times M \mid (x_1, x_2) \in X\}$.

Theorem 2.12. *Sei X ein stationärer markierter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M. Sei Λ das Intensitätsmaß von X. Falls $\Lambda(C \times M) < \infty$ für jede kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ist, dann gibt es eine Konstante $\gamma \geq 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf M, so dass $\Lambda = \gamma \cdot \lambda_d \otimes \mathbb{Q}$.*
Falls $\gamma > 0$, dann ist $\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt.

Ein Maß μ auf $\mathbb{R}^d$ heißt lokal-endlich, falls $\mu(C) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

Lemma 2.13. *Sei μ ein lokal-endliches verschiebungsinvarintes Maß auf $\mathbb{R}^d$, d.h. $\mu(A + v) = \mu(A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $v \in \mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine Konstante $c \geq 0$ mit $\mu(A) = c \cdot \lambda_d(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Ohne Beweis.
Beweis des Satzes: Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann ist μ_A, definiert durch $\mu_A(B) := \Lambda(B \times A)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ein Maß, das lokal-endlich und wegen

$$\begin{aligned}
\mu_A(B + v) &= \mathbb{E}\#\left(X \cap ((B + v) \times A)\right) \\
&= \mathbb{E}\#\left((X - v) \cap (B \times A)\right) \\
&= \mathbb{E}\#\left(X \cap (B \times A)\right) \\
&= \mu_A(B)
\end{aligned}$$

translationsinvariant ist. Wegen dem Lemma gibt es also eine Konstante $c_A \geq 0$ mit $\mu_A(B) = c_A \lambda_d(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Die Funktion $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto c_A$ ist wegen $c_A = \lambda_d\left([0,1)^d \times A\right)$ ein endliches Maß. Also ist $\mathbb{Q}(A) := \frac{1}{\gamma} c_A$ für $\gamma := c_M$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und es gilt $\Lambda(B \times A) = \gamma \cdot \lambda_d(B) \cdot \mathbb{Q}(A)$ für $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $\Lambda = \gamma \cdot \lambda_d \otimes \mathbb{Q}$. $\square$

Definition 2.14. *Ein markierter Punktprozess X in $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M heißt Poissonprozess, wenn $\#(X \cap B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{M}$ Poissonverteilt ist. Hierbei betrachten wir Zufallsvariablen N mit $\mathbb{P}(N = 0) = 1$ oder $\mathbb{P}(N = \infty) = 1$ als Poisson-verteilt.*

Lemma 2.15. *Das Intensitätsmaß Λ eines Poissonprozesses X ist lokal-endlich und erfüllt $\Lambda(\{x\} \times M) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Es ist $\mathbb{P}(\#(X \cap \{x\} \times M) \geq 2) = 0$, also $\mathbb{P}(\#(X \cap \{x\} \times M) = 0) = 1$, weil $X \cap \{x\} \times M$ Poisson-verteilt ist. Somit $\Lambda(\{x\} \times M) = \mathbb{E}\#(X \cap \{x\} \times M) = 0$.
Sei $C \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist $\mathbb{P}(\#(X \cap C) < \infty) = 1$. Weil $\#(X \cap C)$ Poisson-verteilt ist, folgt $\Lambda(C) = \mathbb{E}\#(X \cap C) < \infty$. $\square$

Theorem 2.16. *Sei Λ ein Maß auf $\mathbb{R}^d \times M$ mit $\Lambda(C \times M) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}$ und $\Lambda(\{x\} \times M) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Dann gibt es einen Poissonprozess X auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M, der Intensitätsmaß Λ hat.*

Ohne Beweis.

Theorem 2.17. *Seien X und Y zwei Poissonprozesse auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M, die dasselbe Intensitätsmaß haben. Dann ist $X \overset{d}{=} Y$.*

Ohne Beweis.

Theorem 2.18. *Sei X Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M. Dann sind $\#(X \cap A_1), \ldots, \#(X \cap A_n)$ unabhängig für disjunkte messbare Mengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^d \times M$.*

Beweis: Wir konstruieren einen weiteren Prozess Y, für den diese Zufallsvariablen offensichtlich unabhängig sind und zeigen, dass dieser die gleiche Verteilung wie X hat. Sei Λ das Intensitätsmaß von X und $A_{n+1} := (\mathbb{R}^d \times M) \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$.
Seien $Y_1, \dots, Y_{n+1}$ unabhängige Kopien von X. Definiere

$$Y = (Y_1 \cap A_1) \cup \dots \cup (Y_{n+1} \cap A_{n+1}).$$

Dann sind $\#(Y \cap A_1), \dots, \#(Y \cap A_{n+1})$ unabhängig. Es bleibt zu zeigen, dass Y die gleiche Verteilung wie X hat, also ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß Λ ist.
Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{M}$ ist

$$\#(Y \cap B) = \sum_{i=1}^{n+1} \#(Y \cap B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \#(Y_i \cap (B \cap A_i))$$

eine Summe von unabhängigen Poissonverteilten Zufallsvariablen. Diese ist Poissonverteilt. Weiter ist das Intensitätsmaß von Y gegeben durch

$$\mathbb{E}\#(Y \cap B) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}\#(Y_i \cap (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n+1} \Lambda(B \cap A_i) = \Lambda(B).$$

□

Definition 2.19. *Sei X ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M. Dann heißt $X^0 := \{x \mid (x,m) \in X\}$ der zu X gehörige unmarkierte Punktprozess.*

Theorem 2.20. *Sei X ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum M. Dann ist der unmarkierte Punktprozess X^0 ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d$.*

Beweis: Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist $\#(X^0 \cap B) = \#(X \cap (B \times M))$ Poisson-verteilt und, falls B kompakt ist, f.s. endlich. □

2.3 Die typische Zelle

Es sei $\mathcal{K}'$ das System der nicht-leeren, konvexen und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Durch die Borel-σ-Algebra der Hausdorff-Metrik wird $\mathcal{K}'$ zu einem messbaren Raum.

Definition 2.21. *Eine Funktion $c : \mathcal{K}' \to \mathbb{R}^d$ heißt kovariant, falls $c(K+x) = c(K) + x,\ \ K \in \mathcal{K}', x \in \mathbb{R}^d$ gilt.*

Bsp.: Für jede Menge $K \in \mathcal{K}'$ gibt es eine eindeutig bestimmte Kugel kleinsten Radius, die K enthält.
(Ohne Beweis.)
Die Funktion $c : \mathcal{K}' \to \mathbb{R}^d$, die eine Menge $K \in \mathcal{K}'$ auf den Mittelpunkt dieser Kugel abbildet, ist kovariant.
Wir wählen nun eine feste Zentrumsfunktion $c : \mathcal{K}' \to \mathbb{R}^d$, die kovariant und messbar ist. Es bezeichne

$$\mathcal{K}_0 := \{K \in \mathcal{K}' \mid c(K) = 0\}$$

die Menge aller zentrierten, nicht-leeren konvexen und kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.

Definition 2.22. *Eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ heißt stationär, falls $Z \stackrel{d}{=} Z + x$.*

Definition 2.23. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$ und $k \in \{0, \dots, d\}$. Dann ist*

$$\{(c(F), F - c(F)) \mid F \in \mathcal{F}_k(X)\}$$

ein stationärer, markierter Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Markenraum $\mathcal{K}_0$. Angenommen, sein Intensitätsmaß $\Lambda^{(k)}$ erfüllt $\Lambda^{(k)}(C \times \mathcal{K}_0)$ für kompakte $C \subseteq \mathbb{R}^d$. Seine Intensität heißt Intensität der k-Seiten und wird mit $\gamma^{(k)}$ bezeichnet. Die Markenverteilung heißt Verteilung der typischen k-Seite und wird mit $\mathbb{Q}^{(k)}$ bezeichnet. Im Fall $k = d$ spricht man von der Intensität der Zellen bzw. von der typischen Zelle. Der Ausdruck $\gamma^{(k)} < \infty$ soll bedeuten, dass das $\gamma^{(k)}$ definierende Intensitätsmaß lokal-endlich ist.

Es bezeichne nun

$$n_{kj} := \int_{\mathcal{K}_0} \#\mathcal{F}_j(A) \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(k)}(A), \ \ 0 \leq j \leq k \leq \mathrm{d},$$

die erwartete Anzahl der j-Seiten der typischen k-Seite.
Weiter seien

$$v := \int_{\mathcal{K}_0} \lambda_d(A) \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(d)}(A) \text{ und } s := \int_{\mathcal{K}_0} M(A) \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(d)}(A)$$

das erwartete Lebesgue-Maß bzw. die erwartete Minkowski-Oberfläche der typischen Zelle (die Anschauung, dass die Minkowski-Oberfläche $M(A)$ die Oberfläche von A angibt, ist hier ausreichend; für eine formale Definition vgl. Abschnitt 3.1 des ersten Teils.) Schließlich ist

$$l := \int_{\mathcal{K}_0} L(A) \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(1)}(A)$$

die erwartete Länge der typischen Kante. Dabei haben wir verwendet, dass $\mathbb{Q}^{(1)}$ auf der Menge aller Liniensegmente

$$[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0,1]\}, \ \ x, y \in \mathbb{R}^d,$$

konzentriert ist, und haben mit

$$L([x,y]) := ||x-y||$$

die Länge von $[x,y]$ bezeichnet.
Die Auswahl dieser geometrischen Größen ist dadurch motiviert, dass diese im Fall $d=2$ “die wichtigsten” sind.
Wir werden nun Beziehungen zwischen den 9 Größen $\gamma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(0)}, n_{20}, n_{21}, n_{10}, v, s$ und l herleiten. Dabei werden wir sehen, dass für seitentreue stationäre zufällige Mosaike in $\mathbb{R}^2$ aus $\gamma^{(2)}, \gamma^{(0)}$ und l die übrigen sechs Größen berechnet werden können.
Bem.: Für jedes zufällige Mosaik X in $\mathbb{R}^d$ ist

$$n_{21} = n_{20},$$

da jede 2-Seite von X gleich viele 1-und 0-Seiten enthält, und

$$n_{10} = 2,$$

da jede 1-Seite zwei 0-Seiten enthält.

Theorem 2.24. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$ mit Zellintensität $\gamma^{(d)} < \infty$. Dann ist*

$$v = \frac{1}{\gamma^{(d)}}.$$

Beweis: Nach dem Satz von Campbell (Theorem 2.10) ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_{\substack{P \in \mathcal{C}(X) \\ c(P) \in [0,1)^d}} \lambda_d(P) &= \mathbb{E} \sum_{P \in \mathcal{C}(X)} \lambda_d(P) \mathbf{1}_{[0,1)^d}(c(P)) \\
&= \gamma^{(d)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}_0} \lambda_d(A+x) \mathbf{1}_{[0,1)^d}(x) \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(d)}(A) \, \mathrm{d}x \\
&= \gamma^{(d)} \int_{\mathcal{K}_0} \lambda_d(A) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[0,1)^d}(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(d)}(A) \\
&= \gamma^{(d)} \int_{\mathcal{K}_0} \lambda_d(A) \, \mathrm{d}\mathbb{Q}^{(d)}(A) \\
&= \gamma^{(d)} \ v.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sum_{\substack{P \in \mathcal{C}(X) \\ c(P) \in [0,1)^d}} \lambda_d(P) &= \mathbb{E} \sum_{\substack{P \in \mathcal{C}(X) \\ c(P) \in [0,1)^d}} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \lambda_d\left(P \cap \left([0,1)^d + z\right)\right) \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} \sum_{\substack{P \in \mathcal{C}(X) \\ c(P) \in [0,1)^d}} \lambda_d\left((P - z) \cap [0,1)^d\right) \\
&= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E} \sum_{\substack{P \in \mathcal{C}(X) \\ c(P) \in [0,1)^d + z}} \lambda_d\left(P \cap [0,1)^d\right) \\
&= \mathbb{E} \sum_{P \in \mathcal{C}(X)} \lambda_d\left(P \cap [0,1)^d\right) \\
&= 1. \qquad \square
\end{aligned}$$

Theorem 2.25. *Sei X ein seitentreues stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^2$ mit $\gamma^{(1)} < \infty$. Dann ist $\gamma^{(2)}$, $n_{21} < \infty$ und es gilt*

$$\gamma^{(2)} n_{21} = 2\gamma^{(1)}.$$

Beweis: Es gilt

$$\mathbb{E}\left[\#\{F \in \mathcal{F}_1(X) \mid c(F) \in [0,1)^2\}\right] = \gamma^{(1)}.$$

Andererseits ist

$$\#\{F \in \mathcal{F}_1(X) \mid c(F) \in [0,1)^2\} = \frac{1}{2} \sum_{P \in \mathcal{C}(X)} \sum_{F \in \mathcal{F}_1(P)} \mathbf{1}_{[0,1)^2}(c(F)).$$

Mit dem Satz von Campbell folgt

$$\begin{aligned}
&2\mathbb{E}[\#\{F \in \mathcal{F}_1(X) \mid c(F) \in [0,1)^2\}] \\
&= \gamma^{(2)} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{F \in \mathcal{F}_1(A+x)} \mathbf{1}_{[0,1)^2}(c(F)) \,\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(2)}(A) \,\mathrm{d}x \\
&= \gamma^{(2)} \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{F \in \mathcal{F}_1(A)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,1)^2}(c(F) + x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(2)}(A) \\
&= \gamma^{(2)} \int_{\mathcal{K}_0} \#\mathcal{F}_1(A) \,\mathrm{d}\mathbb{Q}^{(2)}(A) \\
&= \gamma^{(2)} n_{21}.
\end{aligned}$$

Theorem 2.26. *Sei X ein stationäres seitentreues zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^2$ mit $\gamma^{(1)}, l < \infty$. Dann ist $\gamma^{(2)}, s < \infty$ und*

$$s = 2\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}} l.$$

Beweis: Übung.

Theorem 2.27. *Sei X ein stationäres seitentreues Mosaik in $\mathbb{R}^2$ mit $\gamma^{(1)} < \infty$. Dann ist*

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \gamma^{(2)}$$
$$3 \le n_{20} \le 6.$$

Ohne Beweis.

Definition 2.28. *Ein seitentreues Mosaik $M \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt normal, falls jede Ecke $v \in \mathcal{F}_0(M)$ in genau $d+1$ Zellen des Mosaiks liegt.*

Theorem 2.29. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ein normales Mosaik. Dann liegt jede j-Seite $F \in \mathcal{F}_j(M)$ in genau $\binom{d-j+1}{k-j}$ k-Seiten, $0 \le j \le k \le d$.*

Lemma 2.30. *Sei M ein seitentreues Mosaik, $F \in \mathcal{F}_j(M)$ eine j-Seite und $F' \in \mathcal{F}_{j+1}(M)$ eine $(j+1)$- Seite mit $F \subseteq F'$. Dann enthält jede Zelle $P \in \mathcal{C}(M)$, die F' enthält, auch F und es gibt mindestens eine Zelle, die F enthält, aber nicht F'.*

Beweis: Die erste Aussage ist trivial.
Zum Nachweis der zweiten Aussage bezeichne $v \in S^{d-1}$ den Einheitsvektor, der im zur affinen Hülle von F' parallelen Unterraum enthalten ist, auf der affinen Hülle von F senkrecht steht und in Punkten aus F von F' weg zeigt. Nun sind die Punkte $x + sv,\ x \in F, s > 0$ in keiner Zelle enthalten, die F' enthält. Sei nämlich P eine Zelle von M, die F' enthält. Dann ist F wegen der Seitentreue von M eine Seite von M; die genaue Argumentation wird übergangen. Also gibt es eine Hyperebene H mit $F = H \cap P$. Der Vektor v liegt nicht im zu H parallelen Unterraum, denn $F' \nsubseteq H$. Also liegen die Punkte der Form $x + sv, s > 0$ auf der anderen Seite von H als $F' \setminus F$ und somit nicht in P.
Nun müssen die Punkte $x + sv, s > 0$, in einer weiteren Zelle enthalten sein und, falls s klein genug ist, muss diese weitere Zelle F schneiden und wegen der Seitentreue des Mosaiks sogar enthalten.

Beweis des Theorems 2.29:
Aus dem Lemma folgt durch einfache Induktion, dass jede j-Seite in genau $d - j + 1$ Zellen enthalten ist. Somit ist der Spezialfall $k = d$ bewiesen. Der allgemeine Fall wird übergangen.

Theorem 2.31. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ein normales stationäres zufälliges Mosaik mit $\gamma^{(1)} < \infty$. Dann ist*

$$n_{20} = 6 \text{ und } \gamma^{(0)} = 2\gamma^{(2)}$$

Beweis: Übung.

Definition 2.32. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es f.s. genau eine Zelle Z_0 mit $0 \in Z_0$. Diese nennen wir Nullzelle. Ihre Verteilung bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}_0$.*

Definition 2.33. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Eine zufällige kompakte Menge Z mit Werten in $\mathcal{K}_0$ heißt typische Zelle von X, falls sie Verteilung $\mathbb{Q}^{(d)}$ hat.*

Theorem 2.34. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik im $\mathbb{R}^d$ mit $\gamma^{(d)} < \infty$. Die typische Zelle sei Z und die Nullzelle sei Z_0. Sei $f : \mathcal{K}' \to [0, \infty)$ eine verschiebungsinvariante messbare Funktion. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[f(Z_0)] = \gamma^{(d)}\, \mathbb{E}\left[f(Z)\lambda_d(Z)\right].$$

Man sagt hierzu, die Nullzelle ist (bis auf Verschiebung) eine volumen-gewichtete Version der typischen Zelle.
Beweis: Nach dem Satz von Campbell gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(Z_0)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{P \in \mathcal{C}(X)} f(P)\mathbf{1}_P(0)\right] \\
&= \gamma^{(d)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}_0} f(A + x)\mathbf{1}_{A+x}(0)\, d\mathbb{Q}^{(d)}(A)\, dx \\
&= \gamma^{(d)} \int_{\mathcal{K}_0} f(A) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(-x)\, dx\, d\mathbb{Q}^{(d)}(A) \\
&= \gamma^{(d)} \int_{\mathcal{K}_0} f(A)\lambda_d(A)\, d\mathbb{Q}^{(d)}(A) \\
&= \gamma^{(d)} \mathbb{E}\left[f(Z)\lambda_d(Z)\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Theorem 2.35. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$ mit $\gamma^{(d)} < \infty$. Es sei Z die typische Zelle von X, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion des Volumens $\lambda_d(Z)$ der typischen Zelle, Z_0 die Nullzelle und $F_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion des Volumens $\lambda_d(Z_0)$ der Nullzelle. Dann gilt*

$$F_0(x) \leq F(x),\ \ 0 \leq x < \infty.$$

Man sagt, das Volumen der Nullzelle sei stochastisch größer als das der typischen Zelle.
Beweis: Indem wir den letzten Satz mit

$$f(A) = \mathbf{1}_{[0,x]}(\lambda_d(A)), \;\; A \in \mathcal{K}'$$

für ein $x \in \mathbb{R}$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[0,x]}(\lambda_d(Z_0))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[0,x]}(\lambda_d(Z))\lambda_d(Z)\right]\gamma^{(d)} \\ &= \frac{\int_0^x (F(x)-F(t))\,\mathrm{d}t}{\mathbb{E}\left[\lambda_d(Z)\right]} \end{aligned}$$

nach unten stehenden Lemma 2.36. Nun gilt

$$\begin{aligned} (F(x)-F_0(x))\,\mathbb{E}\left[\lambda_d(Z)\right] &= F(x)\int_0^\infty 1-F(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x F(x)-F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(x)\int_x^\infty 1-F(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x F(x)-F(x)+F(t)-F(x)F(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Lemma 2.36. *Sei Y eine $[0,\infty)$-wertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und sei $x \in [0,\infty)$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[0,x]}(Y)Y\right] = \int_0^x F(x)-F(t)\mathrm{d}t.$$

Beweis: Es gilt

$$\mathbf{1}_{[0,x]}(Y)Y = \int_0^x \mathbf{1}_{[0,x]}(Y) - \mathbf{1}_{[0,t]}(Y)\mathrm{d}t$$

realisierungsweise. Also

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[0,x]}(Y)Y\right] = \int_0^x \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[0,x]}(Y)\right] - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{[0,t]}(Y)\right]\mathrm{d}t \qquad = \int_0^x F(x)-F(t)\mathrm{d}t.$$

2.4 Voronoi-Mosaike

Für $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne

$$d(A,x) := \inf\{||x-y|| \mid y \in A\}$$

den Abstand von x zu A und

$$\Pi(A,x) := \{y \in A \mid d(A,x) = ||x-y||\}$$

die Menge der metrischen Projektionen von x auf A.

Definition 2.37. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Dann heißt*

$$\operatorname{exo} A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \#\Pi(A,x) \geq 2\}$$

Exoskelett von A.

Bsp.: Sei $A = S^{d-1} \cup B_1(3e_1)$ die Vereinigung der leeren Kugel mit Radius 1 um den Ursprung und der ausgefüllten Kugel mit Radius 1 um $3e_1$. Dann ist

$$\operatorname{exo} A = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, e_1\rangle = \tfrac{3}{2}\}.$$

Theorem 2.38. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine lokal-endliche Punktkonfiguration (d.h. für jede kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ist $\#A \cap C < \infty$) mit $\mathbb{R}^d = \operatorname{conv} A$. Dann ist $\operatorname{exo} A$ ein Mosaik und die Zellen des Mosaiks sind genau die Mengen*

$$C(y,A) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid y \in \Pi(A,x)\}, \;\; y \in A.$$

Beweis: Die Menge

$$\tilde{C}(y, A) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x - y|| < ||x - \tilde{y}||, \tilde{y} \in A \setminus \{y\}\}, \ \ y \in A,$$

ist der Durchschnitt von Halbräumen und somit konvex. Offensichtlich liegt jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{exo} A$ in derjenigen Menge $\tilde{C}(y, A)$ mit $\{y\} = \Pi(A, x)$. Weiter schneidet jeder stetige Weg von einem Punkt $x_1 \in \tilde{C}(y_1, A)$ zu einem Punkt $x_2 \in \tilde{C}(y_2, A)$ die Menge $\operatorname{exo} A$, sofern $y_1 \neq y_2$. Also sind die Mengen $\tilde{C}(y, A), y \in A$, die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{exo} A$.
Es gilt

$$\operatorname{cl} \tilde{C}(y, A) = C(y, A), \ \ y \in A.$$

Ohne Beweis.
Insbesondere sind die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{exo} A$ konvex. Weisen wir nun die Lokal-Endlichkeit (Teil (a) von Definition 2.1) nach. Sei hierfür $C \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann gibt es $r > 0, m \in \mathbb{R}^d$ mit $C \subsetneq B_r(m)$. Wähle $r > 0$ so groß, dass es $y_1 \in B_r(m) \cap A$ gibt. Nun liegt jeder Punkt $x \in C \setminus \operatorname{exo} A$ in einer Menge $\tilde{C}(y, A)$ für $y \in A \cap B_{3r}(m)$, denn für $y \in A \setminus B_{3r}(m)$ gilt $||x - y|| > 2r \geq ||y_1 - x||$. Da $A \cap B_{3r}(m)$ aber endlich ist, schneidet C nur endlich viele Mengen $\tilde{C}(y, A)$, $y \in A$.
Schließlich weisen wir noch nach, dass die Mengen $\tilde{C}(y, A)$, $y \in A$, beschränkt sind. Angenommen, für ein $y \in A$ ist $\tilde{C}(y, A)$ unbeschränkt. Dann gibt es laut unten stehendem Lemma 2.39 einen Punkt $p \in \tilde{C}(y, A)$ und $v \in S^{d-1}$ mit $p + \alpha v \in \tilde{C}(y, A)$ für alle $\alpha > 0$. Wegen $\operatorname{conv} A = \mathbb{R}^d$ gibt es $y_1 \in A$ mit $\langle y_1, v\rangle > \langle y, v\rangle$. Für hinreichend große $\alpha > 0$ ist nun

$$\begin{aligned}
||p + \alpha v - y_1||^2 &\leq ||p - y_1||^2 + \langle p + \alpha v - y_1, v\rangle^2 \\
&= ||p - y_1||^2 + (\langle p - y_1, v\rangle + \alpha)^2 \\
&< (\langle p - y, v\rangle + \alpha)^2 \\
&\leq ||p + \alpha v - y||^2
\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $p + \alpha v \in \tilde{C}(y, A)$. Der Nachweis von Eigenschaft c) (dass das Mosaik keine inneren Punkte hat), wird übergangen. Somit ist $\operatorname{exo} A$ ein Mosaik.

Lemma 2.39. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine konvexe, unbeschränkte Menge, die entweder abgeschlossen ist oder innere Punkte enthält. Dann enthält K eine Halbgerade, d.h. es gibt einen Punkt $p \in K$ und eine Richtung $v \in S^{d-1}$ mit $p+\alpha v \in K$ für alle $\alpha > 0$.*

Ohne Beweis.

Definition 2.40. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine lokal-endliche Punktkonfiguration mit* $\operatorname{conv} A = \mathbb{R}^d$. *Dann heißt* $\operatorname{exo} A$ *das von A erzeugte Voronoi-Mosaik.*

Lemma 2.41. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine lokal-endliche Punktkonfiguration mit* $\operatorname{conv} A = \mathbb{R}^d$. *Dann ist* $\operatorname{exo} A$ *ein seitentreues Mosaik.*

Ohne Beweis.

Lemma 2.42. *Sei $\tilde{X}$ ein stationärer Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{P}(\tilde{X} = \varnothing) = 0$. Dann wird von $\tilde{X}$ realisierungsweise ein Voronoi-Mosaik X erzeugt und dieses ist ein stationäres zufälliges Mosaik.*

Beweis: Aus einem Satz aus Stochastische Geometrie I folgt, dass $\mathbb{P}(\operatorname{conv} \tilde{X} = \mathbb{R}^d) = 1$. Somit ist realisierungsweise ein Voronoi-Mosaik definiert. Der Nachweis der Messbarkeit wird übergangen. Die Stationarität von X folgt sofort aus der von $\tilde{X}$.
Beispiel: Das von $\mathbb{Z}^d$ erzeugte Voronoi-Mosaik ist nicht normal. In jeder Ecke treffen sich nämlich 2^d Zellen.

Theorem 2.43. *Ein von einem stationären Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d$ erzeugtes Voronoi-Mosaik ist normal.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass sich in jeder Ecke $d + 1$ Zellen treffen. Nimm an, es gibt eine Ecke in der sich mindestens $d + 2$ Zellen treffen. Dann haben $d + 2$ Punkte des zu Grunde liegenden Poisson-Prozesses den selben Abstand von dieser Ecke. Also liegen $d+2$ Punkte dieses Poissonprozesses auf einer Kugel. Dies passiert aber (ohne Beweis) mit Wahrscheinlichkeit 0.

Theorem 2.44. *Für ein Voronoi-Mosaik in $\mathbb{R}^2$, das von einem stationären Poisson-Prozess mit Intensität γ induziert wird, gilt*

$$\gamma^{(2)} = \gamma$$
$$\gamma^{(0)} = 2\gamma$$
$$l = \frac{2}{3\sqrt{\gamma}}$$

Beweis: Der formale Beweis von $\gamma^{(2)} = \gamma$ wird übergangen. (Die Schwierigkeit liegt darin, dass die Zentrumsfunktion c eine Zelle $C(y, \tilde{X})$, $y \in \tilde{X}$, nicht unbedingt auf y abbildet.) Die Beziehung $\gamma^{(0)} = 2\gamma$ folgt sofort aus der Normalität. Der Nachweis von $l = \frac{2}{3\sqrt{\gamma}}$ wird übergangen.

2.5 STIT-Mosaike

Sei X ein zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Mosaiken in $\mathbb{R}^d$, die unabhängig von X ist. Wähle eine messbare Nummerierung der Zellen $P_1, P_2, \dots$ von X. Dann heißt das Mosaik

$$I(X, \mathcal{X}) = X \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (P_i \cap X_i)$$

(zweite) Iteration von X (mit X_1). Weil $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und identisch verteilt sind, hängt die Verteilung von $I(X, \mathcal{X})$ nicht von der Wahl der Nummerierung von $P_1, P_2, \dots$ ab.
Bertrachte nun ein zufälliges Mosaik X in $\mathbb{R}^d$ und eine Folge $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$ von Folgen von zufälligen Mosaiken in $\mathbb{R}^d$, so dass alle zufälligen Mosaike unabhängig und identisch verteilt sind. Dann wird durch

$$J_2(X) = I(X, \mathcal{X}_1)$$
$$J_m(X) = I(J_{m-1}(X), \mathcal{X}_{m-1}), \qquad m > 2,$$

die m-te Iteration von X definiert.

Definition 2.45. *Ein stationäres zufälliges Mosaik X in $\mathbb{R}^d$ heißt STIT (<u>st</u>able w.r.t. <u>it</u>eration), falls*

$$X \overset{d}{=} m I_m(X),$$

wobei $mK := \{mx \mid x \in K\}$ für $m > 0$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ die zentrische Streckung von K mit Faktor m bezeichnet.

Der projektive Raum $P^{d-1} := S^{d-1}/\{\pm 1\}$ ist die Sphäre S^{d-1}, wobei zwei gegenüberliegende Punkte als gleich betrachtet werden.
Für ein Mosaik $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und einen Punkt $x \in M$ bezeichne $n(x)$, falls x in genau einer Facette liegt, einen der beiden Normalenvektoren dieser Facette, und sonst einen beliebigen Vektor. Dann ist

$$\lambda_{d-1}(\{x \in M \mid n(x) \text{ ist beliebig}\}) = 0.$$

Theorem 2.46. *Sei X ein stationäres zufälliges Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Falls $\mathbb{E}[\lambda_{d-1}(X \cap C)] < \infty$ für kompakte Mengen $C \subseteq \mathbb{R}^d$ mit inneren Punkten, dann gibt es eine Konstante $S_V > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf P^{d-1} mit*

$$\mathbb{E}\big[\lambda_{d-1}(\{x \in X \cap C \mid n(x) \in A\})\big] = S_V \lambda_d(C) \mathbb{Q}(A)$$

für jede messbare Menge $A \subseteq P^{d-1}$ und jede messbare Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\lambda_d(C) < \infty$.

Ohne Beweis.

Definition 2.47. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.46 heißt S_V die Flächenintensität und $\mathbb{Q}$ die Richtungsverteilung von X.*

Sei $\mathbb{Q}$ ein Maß auf P^{d-1}. Man sagt, $\mathbb{Q}$ sei auf einem Großkreis konzentriert, falls es einen Vektor $v \in S^{d-1}$ gibt mit

$$\mathbb{Q}(\{u \in P^{d-1} \mid \langle u, v \rangle \neq 0\}) = 0.$$

Theorem 2.48. *Sei $S > 0$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf P^{d-1}, das nicht auf einem Großkreis konzentriert ist. Dann gibt es ein STIT-Mosaik mit Flächenintensität S und Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$. Dieses ist in Verteilung eindeutig bestimmt.*

Ohne Beweis.

Theorem 2.49. *Sei X ein zufälliges stationäres Mosaik in $\mathbb{R}^d$ mit $S_V < \infty$. Es bezeichne Y das STIT-Mosaik in $\mathbb{R}^d$ mit Flächenintensität S_V und selber Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$ wie X. Dann gilt*

$$mI_m(X) \to Y, \qquad m \to \infty,$$

in Verteilung.
Dabei sagt man eine Folge $Z_1, Z_2, \dots,$ von zufälligen abgeschlossene Mengen konvergiert in Verteilung gegen eine zufällige abgeschlossene Menge Z, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \in A) = \mathbb{P}(Z \in A)$$

für jede Menge $A \subseteq \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(Z \in \operatorname{bd} A) = 0$, wobei $\operatorname{bd} A$ den Rand von A bzgl. der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz (vgl. Stochastische Geometrie I) bezeichnet.

Ohne Beweis.
Bem.: Die Iteration eines zufälligen stationären Mosaiks ist niemals seitentreu. Also sind STIT-Mosaike nicht seitentreu.

2.6 Hyperebenen-Mosaike

Definition 2.50. *(a) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Mosaik. Man sagt, M ist ein Hyperebenen-Mosaik, falls es eine Menge $\mathcal{H}$ von Hyperebenen gibt mit*

$$M = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

(b) Ein Hyperebenen-Mosaik $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist in allgemeiner Lage, falls jede Ecke in genau d Hyperebenen enthalten ist.

Bem.:

(a) Sei M ein Hyperebenen-Mosaik in allgemeiner Lage. Dann ist jede k-Seite von M in genau $d-k$ Hyperebenen enthalten.

(b) Ein Hyperebenen-Mosaik ist genau dann in allgemeiner Lage, wenn jede Ecke in 2^d Zellen enthalten ist.

Definition 2.51. *Ein zufälliges Mosaik X heißt zufälliges Hyperebenen-Mosaik bzw. zufälliges Hyperebenen-Mosaik in allgemeiner Lage, falls es fast sicher ein Hyperebenen-Mosaik bzw. ein Hyperebenen-Mosaik in allgemeiner Lage ist.*

Theorem 2.52. *Sei X ein stationäres Hyperebenen-Mosaik in $\mathbb{R}^d$ in allgemeiner Lage mit $\gamma^{(k)} < \infty$, $k = 0, \dots, d$. Dann gilt*

$$\gamma^{(k)} = \binom{d}{k} \gamma^{(0)}, \ \ k = 0, \dots, d$$

und

$$n_{kj} = 2^{k-j} \binom{k}{j}, \ \ 0 \le j \le k \le d.$$

Ohne Beweis.

Definition 2.53. *Sei X ein Hyperebenen-Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Eine Gerade $g \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Standardgerade von X, falls g fast sicher zu keiner Hyperebene von X parallel ist und g fast sicher keinen Schnitt von zwei Hyperebenen von X trifft.*

Lemma 2.54. *Sei X ein Hyperebenen-Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine Standardgerade g von X.*

Ohne Beweis.

Definition 2.55. *Sei X ein zufälliges Hyperebenen-Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Für eine Standardgerade g von X betrachten wir den markierten Punktprozess $\tilde{X}$ auf g mit Markenraum S^{d-1}, der entsteht, indem man jeden Punkt p von $g \cap X$ mit dem Einheitsnormalenvektor der Hyperebene von X, in der p liegt, markiert. Falls $\tilde{X}$ ein Poissonprozess ist, heißt das Hyperebenen-Mosaik X Poisson'sch.*

Bem.: Ob ein Hyperebenen-Mosaik Poisson'sch ist, hängt nicht von der Wahl der Standardgerade g ab.

Definition 2.56. *Eine zufällige abgeschlossene Menge Z in $\mathbb{R}^d$ heißt isotrop, falls $Z \stackrel{d}{=} \vartheta Z$ für alle $\vartheta \in O(d)$. Hierbei ist $O(d)$ die orthogonale Gruppe aller Drehungen und Dreh-Spiegelungen $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $\vartheta Z := \{\vartheta x \mid x \in Z\}$.*

Definition 2.57. *Das Haar'sche Maß auf P^{d-1} ist definiert durch*

$$\nu(A) := \frac{1}{\kappa_d}\lambda_d\left(\{\lambda x \mid \lambda \in [-1,1], x \in A\}\right), \quad A \subseteq P^{d-1}.$$

Theorem 2.58. *(a) Sei X ein stationäres Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Falls X isotrop ist, ist die Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$ das Haar'sche Maß auf P^{d-1}.*

(b) Sei X ein stationäres Poisson'sches Hyperebenen-Mosaik oder ein STIT-Mosaik in $\mathbb{R}^d$. Die Richtungsverteilung $\mathbb{Q}$ ist genau dann das Haar'sche Maß auf P^{d-1}, wenn X isotrop ist.

Ohne Beweis.