ulm university universität **uulm**

Dr. Jürgen Kampf
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2015/16
13.04.2016

Stochastik für WiWi - 2. Klausur

Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein nicht programmierbarer Taschenrechner; Ein beidseitig von Hand beschriebenes DIN A4 Blatt.
- **Bewertung:** Es gibt 110 Punkte; 50 Punkte reichen zum Bestehen; 100 Punkte reichen für eine 1,0. Der Lösungsweg muss stets nachvollziehbar sein; gemachte Aussagen müssen begründet werden.
- **Tabellen** für Standardnormalverteilung und t-Verteilung sind auf der Rückseite zu finden.

Aufgabe 1 (4 + 4 + 7 Punkte)

Betrachte folgendes Experiment: In einer Urne befinden sich zu Beginn 6 rote, 8 blaue und 10 weiße Kugeln. Es werden zufällig 4 Kugeln ohne zurücklegen nacheinander aus der Urne gezogen.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei Farben gezogen werden.

(b) Betrachte das Ereignis A: "Die erste gezogene Kugel ist blau, die zweite rot". Wie oft muss das Experiment im Mittel wiederholt werden bis A eintritt?

(c) Du wiederholst das Experiment 500 Mal. Berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A aus Teil (b) in mehr als 35 der 500 Versuche eintritt.

Aufgabe 2 (8 + 7 Punkte)

Aus Erfahrung weißt du, dass du mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% nicht am 2. Termin einer Klausur teilnimmst, wenn du zum Zeitpunkt der Klausur krank bist, mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%, falls du schlecht gelernt hast und mit Wahrscheinlichkeit 80%, falls du die 1. Klausur bestanden hast. Du nimmst sicher nicht daran teil, wenn du zum Klausurtermin noch im Urlaub bist. In allen anderen Fällen schreibst du sie mit. Es wird davon ausgegangen, dass die genannten Gründe disjunkt sind, d.h. beliebige zwei davon können nicht gleichzeitig eintreten.
Es sei bekannt, dass du zum 2. Termin der Klausur zu "Stochastik für WiWi's" krank bist mit Wahrscheinlichkeit 1%, schlecht gelernt hast mit Wahrscheinlichkeit 20%, die 1. Klausur bestanden hast mit Wahrscheinlichkeit 49% und du im Urlaub bist mit Wahrscheinlichkeit 20%.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirst du an der 2. Klausur zu "Stochastik für WiWi's" teilnehmen?

(b) Wenn du nicht am 2. Termin teilgenommen hast, ist es wahrscheinlicher, dass du schlecht gelernt hattest oder du krank warst?

Aufgabe 3 (7 + 8 + 10 Punkte)

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit Zähldichte gegeben durch

$Y \backslash X$	-2	-1	0
-1	0,05	0,1	p_1
1	p_2	0,3	0,25.

wobei $P(X = 0|Y = -1) = 0,4$.

(a) Bestimme p_1 und p_2.

(b) Skizziere die Verteilungsfunktionen von X und Y.

(c) Bestimme $Var(X)$, $Var(Y)$ und $Cov(X, Y)$. Entscheide ob X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 4 (6 + 6 + 8 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f(x) = (\alpha + 1)x^\alpha \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha & \text{falls } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeige für alle $\alpha > 0$, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechne die zugehörige Verteilungsfunktion.

(c) Für welche $\alpha > 0$ hat X^{-3} endlichen Erwartungswert? Gib diesen, soweit er endlich ist, an.

Aufgabe 5 (5 + 10 Punkte)

Eine absolut-stetige Zufallsvariable X heißt Weibull-verteilt mit Skalenparameter $\lambda > 0$ und Formparameter $k > 0$, $X \sim Wei(\lambda, k)$, falls sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot k \cdot (\lambda \cdot x)^{k-1} e^{-(\lambda \cdot x)^k}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

hat. Es gilt

$$\mathbb{E}\, X = \frac{1}{\lambda} \cdot \Gamma\Big(1 + \frac{1}{k}\Big).$$

Wir beobachten unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n \sim Wei(\lambda, k_0)$ mit bekanntem Formparameter k_0 und unbekanntem Skalenparameter λ.

(a) Bestimme* den Momentenschätzer für λ.

(b) Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ. Es darf dabei ohne Beweis verwendet werden, dass eine gewisse zweite Ableitung negativ ist.

Aufgabe 6 (7 + 7 + 6 Punkte)

Der Bibliothekar einer Uni-Bibliothek behauptet, dass im Mittel täglich 100 Bücher ausgeliehen werden. Um diese Aussage zu prüfen wurden an sieben Tagen die verliehenen Bücher jedes Tages gezählt mit folgendem Ergebnis:

114, 95, 84, 129, 108, 122, 76

Wir nehmen an, dass die Daten $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt und unabhängig sind.
Teste

$$H_0 : \mu = 100 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 100$$

zum Niveau 5%, wenn

(a) ...bekannt ist, dass die Standardabweichung 10 Bücher beträgt.

(b) ...wenn die Standardabweichung unbekannt ist.

(c) Gib ein Konfidenzintervall zum Niveau 99% an, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung 10 Bücher beträgt.

*Hinweis: Ist es notwendig zu wissen wie die Gamma-Funktion definiert ist um diesen Teil der Aufgabe zu lösen?

Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Erklärung: Die Tabelle enthält auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte von $\Phi(x)$, wobei $0 \le x \le 4{,}09$ gilt und Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte den Wert, der bis zur ersten Nachkommastelle x entspricht. Dann geht man bis zur Spalte der zweiten Nachkommastelle von x nach rechts. Beispielsweise steht $\Phi(0{,}12)$ in der zweiten Zeile und dritten Spalte: $\Phi(0{,}12) \approx 0{,}54776$. Für negative x verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Für $x \ge 4{,}1$ verwenden wir die Näherung $\Phi(x) \approx 1$.

Quantile $x_{n;\beta}$ der Chi – Quadrat –Verteilung χ_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $x_{9;0.95} \approx 16.92$

n / β	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.001	0.00	0.00	0.02	0.09	0.21	0.38	0.60	0.86	1.15	1.48
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.96	23.59	25.19
0.999	10.83	13.82	16.27	18.47	20.52	22.46	24.32	26.13	27.88	29.59

Quantile $t_{n;\beta}$ zu Students t -Verteilung t_n

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel: $t_{9;0.95} \approx 1.833$

n	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.9875	n
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	1
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	2
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.177	3
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.163	5
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	2.969	6
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.841	7
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.752	8
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.685	9
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.634	10
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.593	11
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.560	12
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.533	13
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.510	14
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.490	15
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.473	16
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.458	17
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.445	18
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.433	19
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.423	20