Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
23. November 2016

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 6

Abgabe: 2. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 4 Punkte)

Es sei f_p gegeben durch

$$f_p(x) = \begin{cases} 2p & \text{, falls } x \in \{-1, 1\} \\ p & \text{, falls } x = 0 \\ 1 - 5p & \text{, falls } x = 2 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche p ist f_p eine Zähldichte?

(b) Es sei nun X eine Zufallsvariable mit Zähldichte f_p, p wie in (a). Bestimme $\mathbb{E}[X^r]$ für $r \in \mathbb{N}$ sowie $\mathsf{Var}(X)$.

Aufgabe 2 (4 + 4 + 4 Punkte)

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $X(\Omega)$. Sei weiterhin $Y = g(X)$. Bestimme in den folgenden Fällen $\mathbb{E}[Y^r]$, $r \in \mathbb{N}$, und $\mathsf{Var}(Y)$:

(a) $X(\Omega) = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \ldots, 4\pi\} = \{k\pi/2,\ k = 0, \ldots, 8\}$ und X ist gleichverteilt[1], $g(x) = \sin(x)$.

(b) $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathsf{Bin}(n, p)$, $p \in (0, 1)$, $g(x) = 2^x$.

(c) $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ und $X \sim \mathsf{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = e^{2x}$. Beachte Fußnote[2].

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei $p \in (0, 0.5)$ und X eine Zufallsvariable mit Zähldichte f_X, wobei $f_X(-1) = f_X(1) = p$ sowie $f_X(0) = 1 - 2p$. Zeige für $r \in \mathbb{N}$, dass das r-te Moment von X existiert und es gilt:

$$\mathbb{E}[X^r] = \begin{cases} 0 & \text{, falls } r \text{ ungerade} \\ 2p & \text{, falls } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 4 (2 + 3 Punkte)

Es sei X eine beliebige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum[3] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Zeige, dass für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ das r-te Moment von Y stets existiert, d.h. $\mathbb{E}[|Y|^r] < \infty$. Zeige außerdem:

(a) $\mathbb{E}[Y^r] = P(X \in A)$, $r \in \mathbb{N}$

(b) $\mathsf{Var}(Y) = P(X \in A) - P(X \in A)^2$

---

[1] d.h. X nimmt alle Werte in $X(\Omega)$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an.

[2] Hinweis: Verwende $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.

[3] Bei dieser Aufgabe ist es völlig unerheblich, welchen Wahrscheinlichkeitsraum man wählt. Wenn es für die Anschauung hilfreich ist, kannst du einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum annehmen.