Dr. Kirsten Schorning
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2016/17
19. Januar 2017

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 12

Abgabe: 27. Januar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\rho(x) = 2^{-1}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, sowie $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - \mathbb{E}[X]| \geq 2\sqrt{\mathsf{Var}(X)}\}$.

(a) Bestimme $P(X \in A)$.

(b) Vergleiche das Ergebnis aus (a) mit der Abschätzung die sich aus der Ungleichung von Tschebyscheff ergibt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine i.i.d. Zufallsstichprobe mit $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 = \mathsf{Var}(X_1)$. Weiterhin bezeichne $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ das *Stichprobenmittel* sowie $S_X^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ die *Stichprobenvarianz*. Zeige, dass $\mathbb{E}[S_X^2] = \sigma^2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Folgende Tabelle gibt die monatlichen Niederschlagsmengen (in Liter pro Quadratmeter) in Deutschland von Dezember 2015 bis zum Dezember des Folgejahres an.

D	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
37	82	80	45	58	68	115	68	45	40	56	60	25

Wir fassen die Werte der Tabelle als Beobachtung $(x_1, \ldots, x_{13})$ einer i.i.d. Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{13})$ auf. Bestimme das Stichprobenmittel, die Stichprobenvarianz sowie die *Stichprobenstandardabweichung* $s_X = (s_X^2)^{1/2}$ der Stichprobe $(x_1, \ldots, x_{13})$.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Die Messung der Körpergrößen von 200 nach der Geburt zufällig ausgewählten Säuglingen ergab einen Durchschnittswert von 49.35cm. Wir fassen die Daten als Beobachtung $(x_1, \ldots, x_{200})$ einer i.i.d. Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{200})$ auf.

(a) Nimm an, dass $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu = 48.8$cm und $\sigma^2 = 5.3\text{cm}^2$. Bestimme $P(\bar{X}_{200} > \bar{x}_{200})$ sowie das 90%-Quantil der Verteilung von $\bar{X}_{200}$.

(b) Nimm nun an, dass X_1 exponentialverteilt ist mit Erwartungswert 48.8cm. Bestimme mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für $P(\bar{X}_{200} > \bar{x}_{200})$ sowie für das 90%-Quantil der Verteilung von $\bar{X}_{200}$.

Aufgabe 5 (1 + 2 Punkte)

Im Wasserwerk soll der Salzgehalt des Trinkwassers (in mg/l) bestimmt werden. Die Messung ist fehleranfällig, daher wird mehrmals gemessen und dann das Stichprobenmittel berechnet. Wir fassen dabei die Messungen als Beobachtung einer i.i.d. Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ auf. Wir gehen davon aus, dass der tatsächliche Salzgehalt bei allen Messungen derselbe ist. Einen systematischen Fehler schließen wir aus, im Mittel ($\mathbb{E}[X_1]$) sollte also der wahre Wert gemessen werden. Erfahrungsgemäß ist die Standardabweichung der Messungen 1mg/l. Verwende bei den folgenden Teilaufgaben den zentralen Grenzwertsatz.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel um mehr als 0.1mg/l vom zu schätzenden Erwartungswert abweicht falls 100 Messungen durchgeführt wurden?

(b) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel $\bar{X}_n$ der Messungen um mehr als 0.1mg/l vom wahren Wert abweicht, höchstens 5% beträgt?