Dipl.-Math. Stefan Roth
6. Oktober 2017

WiSe 2017

Brush-Up Stochastik - Übungsblatt 2

Besprechung: 6. Oktober im Kurs.

1 Normalverteilung

Aufgabe 1

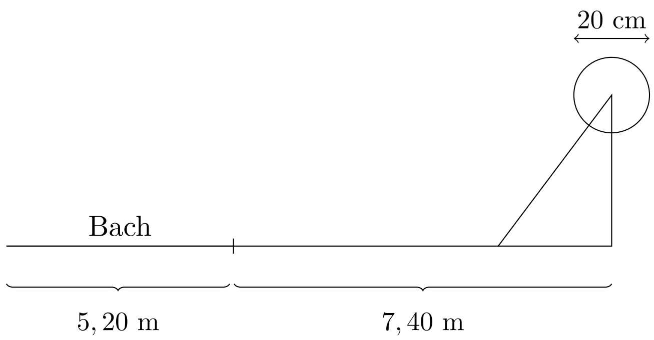
Zu Forschungszwecken wurde ein mittelalterliches Katapult nachgebaut. Es steht $7,40$m vom Ufer eines Baches entfernt, der $5,20$m breit ist. Die Munition besteht aus Steinkugeln, die einen Durchmesser von 20cm aufweisen. Nach einigen Probeschüssen wurde die Theorie aufgestellt, dass die Schussweite normalverteilt ist, im Mittel 10m beträgt und eine Standardabweichung von 5m hat.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geschossene Kugel in vollem Umfang im Bach landet?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel über den Bach geschossen wird und (zumindest teilweise) am gegenüberliegenden Ufer aufschlägt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss nach hinten los geht (d.h., dass die Kugel nicht zum Bach, sondern in die entgegengesetzte Richtung fliegt)?

(d) Elf Meter hinter dem Katapult befindet sich sich ein geparkter Wagen. Ist es ausgeschlossen, dass eine Kugel den Wagen beschädigt? Begründe deine Antwort.



2 Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 2

Im Wasserwerk soll der Salzgehalt des Trinkwassers (in mg/l) bestimmt werden. Die Messung ist fehleranfällig, daher wird mehrmals gemessen und dann das Stichprobenmittel berechnet. Wir fassen dabei die Messungen als Beobachtung einer i.i.d. Stichprobe $(X_1, \dots, X_n)$ auf. Wir gehen davon aus, dass der tatsächliche Salzgehalt bei allen Messungen derselbe ist. Einen systematischen Fehler schließen wir aus, im Mittel ($\mathbb{E}[X_1]$) sollte also der wahre Wert gemessen werden. Erfahrungsgemäß ist die Standardabweichung der Messungen 1mg/l. Verwende bei den folgenden Teilaufgaben den zentralen Grenzwertsatz.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel um mehr als 0.1mg/l vom zu schätzenden Erwartungswert abweicht falls 100 Messungen durchgeführt wurden?

(b) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel $\bar{X}_n$ der Messungen um mehr als 0.1mg/l vom wahren Wert abweicht, höchstens 5% beträgt?

3 Schätzung von Parametern

Aufgabe 3

Es sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe zur Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in [0, 1]$. Betrachte die folgenden Schätzer für p:

$$\hat{p}_1(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n, \qquad \hat{p}_2(X_1, \dots, X_n) = X_n.$$

Untersuche die beiden Schätzer hinsichtlich der in der Vorlesung eingeführten Güteeigenschaften[1] (mit Begründung).

Aufgabe 4

Nachdem die Firma "Spiel- und Spaßautomaten" in den letzten Jahren einen Rekordumsatz mit ihren Glühwein- und Crêpes-Automaten auf dem Ulmer Weihnachtsmarkt erzielt hat, soll in diesem Jahr das Angebot um einen Feuerwurst-Automaten ergänzt werden. Dabei kann man die Wurst mit Senf oder Zaziki bestellen. Da das eigentliche Fachgebiet von "Spiel- und Spaßautomaten" die Herstellung von Glücksspielautomaten ist, wurde der Feuerwurst-Automat mit einem Zufallsgenerator ausgestattet. Eine Feuerwurst mit Senf aus dem Automaten kostet 3 €, eine mit Zaziki 4.50 €. Beim Einwurf der Summe bekommt man entweder die gewählte Wurst, gar keine oder eine Wurst mit Senf und Zaziki. Du lässt dir fünf mal hintereinander eine Feuerwurst mit Senf aus dem Automaten und notierst dabei den entsprechenden Gewinn in Euro mit X, d.h. $X \in \{-3, 0, 1.5\}$[2]. Das Ergebnis deiner Versuche ist $(1.5, -3, 0, -3, 0)$. Mit Hilfe dieser Daten versuchst Du herauszufinden wie X verteilt ist.

(a) Wie würdest Du die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bestimmen, wenn Du keine weitere Information über die Form der Zähldichte hättest?

(b) Du willst es nun genau wissen und wirfst einen Blick auf die Homepage von "Spiel- und Spaßautomaten". Dabei findest du heraus, dass X die folgende Zähldichte besitzt:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3p/2 & \text{falls } x = -3 \\ p & \text{falls } x = 0 \\ 1 - 5p/2 & \text{falls } x = 1.5 \end{cases},$$

wobei $p \in (0, 2/5)$. Konstruiere einen Schätzer für p gemäß der Momentenmethode aufgrund der vorliegenden Daten.

(c) Berechne $\mathbb{P}_p(X_1 = 1.5, X_2 = -3, X_3 = 0, X_4 = -3, X_5 = 0)$ also die Wahrscheinlichkeit, dass die vorhandene Stichprobe auftritt) unter der Annahme, dass der Gewinn wie in (b) angegeben verteilt ist. Für welchen Wert von p wird diese Wahrscheinlichkeit maximal? Skizziere für diesen Wert von p die Verteilungsfunktion von X.

[1] Gemeint sind (asymptotische) Erwartungstreue und schwache Konsistenz

[2] Bekommst du keine Wurst ist der Gewinn 3 €, bei einer Wurst mit Senf 0 € und wenn du eine Wurst mit Senf und Zaziki bekommst beträgt der Gewinn 1.50 €.

Aufgabe 5

Die Firma "ShineBright" ist Hersteller hochwertiger Leuchtmittel. Neu im Sortiment ist Die LED-Lampe "Helle Freude". Um ihr Produkt bewerben zu können, möchte "ShineBright" die mittlere Brenndauer (in Stunden) ihrer LED-Lampen anhand einer erhobenen Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ bestimmen. Es wird davon ausgegangen, dass es sich dabei um die Beobachtung einer Zufallstichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ zur Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ handelt.

(a) Bestimme den ML-Schätzer für den Erwartungswert $1/\lambda$.

(b) Bestimme einen Momentenschätzer für den Erwartungswert $1/\lambda$.

(c) Bei einer Überprüfung von 10 der neuen Lampen ergaben sich für die Brenndauern die Werte

$$(9512.74, 16586.10, 13091.19, 7548.20, 3352.39, 342.27, 11681.13, 8795.62, 2800.88, 583.09).$$

Bestimme die Werte der Schätzer aus (a) und (b) für diese Stichprobe.

Aufgabe 6

$X_1, \ldots, X_n$ sei eine Zufallsstichprobe der diskreten Verteilung mit folgender Zähldichte:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{x^2} (1-\theta)^{1-x^2} & \text{falls } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Über den Parameter θ ist lediglich bekannt, dass er positiv und kleiner 1 ist.

(a) Stelle sicher, dass es sich bei f_θ tatsächlich um eine Zähldichte handelt.

(b) Zeige, dass die Ableitung der log-Likelihoodfunktion nach θ durch

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{n}{\theta}\hat{m}_2 - \frac{n}{1-\theta}(1 - \hat{m}_2)$$

gegeben ist und konstruiere einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ. Hierbei sei $\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.