

Lineare Modelle in der Schadenreservierung

Klaus D. Schmidt

Gemeinsame Arbeit mit

Klaus Th. Hess, Kathrin Klobberdanz, Alexander Ludwig, Carsten
Pröhl, Christiane Schmeißer, Katrin Thänert, Mathias Zocher

Technische Universität Dresden

Ulm, 14. Dezember 2010

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Schadenreservierung

Aufgaben der Schadenreservierung:

- ▶ Prognose zukünftiger Zahlungen für bereits eingetretene Versicherungsfälle (=: **Reserven**)
- ▶ Schätzung des Prognosefehlers

(Solvency II).

Datenarten:

- ▶ Schadenzahlen
- ▶ Schadenzahlungen
- ▶ Schadenaufwände ($:=$ Schadenzahlungen + Einzelfallreserven)
- ▶ ...

Spezielle Struktur der Daten

Abwicklungsdreieck (1)

Zuwächse:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	2000	2001	2002	2003	2004	2005
2000	1001	854	568	565	347	148
2001		1113	990	671	648	422
2002			1265	1168	800	744
2003				1490	1383	1007
2004					1725	1536
2005						1889

In dieser Darstellung ist keine Struktur der Daten erkennbar.

Abwicklungsdreieck (2)

Relative Abwicklungsjahre:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
2000	1001	854	568	565	347	148
2001	1113	990	671	648	422	
2002	1265	1168	800	744		
2003	1490	1383	1007			
2004	1725	1536				
2005	1889					

In dieser Darstellung sind die Zeilen bzw. Spalten näherungsweise proportional.

Abwicklungsdreieck (3)

Relative Abwicklungsjahre und relative Anfalljahre:

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Dies ist die Standardnotation.

Prognose

Gesucht:

- ▶ **Prädiktoren** für das untere Dreieck (Zukunft)
- ▶ **Schätzer** für den Prognosefehler

Das Prognose–Problem erfordert

- ▶ die Wahl eines **stochastischen Modells**, das den Zufallsmechanismus beschreibt, der
 - ▶ die **beobachtbaren** Zuwächse (Abwicklungsdreieck) und
 - ▶ die **nicht–beobachtbaren** Zuwächse (unteres Dreieck)erzeugt.
- ▶ die Wahl einer **Klasse zulässiger Prädiktoren**, und
- ▶ die Wahl einer **Bewertungsfunktion** für den Prognosefehler.

Abwicklungsquadrat zufälliger Zuwächse

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	$n-i$	...	$n-1$	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-i}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-i}$	...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-i}$	...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	...	$Z_{n-k,k}$	...	$Z_{n-k,n-i}$	...	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	...	$Z_{n-1,k}$	...	$Z_{n-1,n-i}$	...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
n	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	...	$Z_{n,k}$	...	$Z_{n,n-i}$	...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

Die Zuwächse $Z_{i,k}$ sind

- ▶ für $i+k \leq n$ beobachtbar und
- ▶ für $i+k \geq n+1$ nicht-beobachtbar.

Das Problem besteht in der Prognose der nicht-beobachtbaren Zuwächse.

Reserven (1)

Anfalljahrreserven ($i \in \{1, \dots, n\}$):

$$R_i := \sum_{k=n-i+1}^n Z_{i,k}$$

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Reserven (2)

Kalenderjahrreserven ($c \in \{n+1, \dots, 2n\}$):

$$R_{(c)} := \sum_{i=c-n}^n Z_{i,c-i}$$

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Reserven (3)

Gesamtreserve:

$$R := \sum_{i=1}^n \sum_{k=n-i+1}^n Z_{i,k}$$

Anfall- jahr	Abwicklungsjahr					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Modelle der Schadenreservierung:

- ▶ Das additive Modell.
- ▶ Das Panning Modell.
- ▶ Das Chain–Ladder Modell.

Additives Modell (1)

Das additive Modell

Es gibt bekannte Volumenmaße $v_0, v_1, \dots, v_n$ und unbekannte Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ und $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ mit

$$E[Z_{i,k}] = v_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[Z_{i,k}, Z_{j,l}] = v_i \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- ▶ Hier und im folgenden ist $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol.
- Mack [1997, 2002]: *Schadenversicherungsmathematik*.
- Radtke & Schmidt (Hrsg.) [2004]: *Handbuch zur Schadenreservierung*.

Additives Modell (2)

- Die Parameter

$$\vartheta_k := \frac{\zeta_k}{\sum_{l=0}^n \zeta_l} = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[\sum_{l=0}^n Z_{i,l}]}$$

sind unabhängig vom Anfalljahr i und bilden ein **Abwicklungsmuster für Anteile**.

- Additiver Prädiktor** für einen nicht-beobachtbaren Zuwachs $Z_{i,k}$ ($i + k \geq n + 1$):

$$Z_{i,k}^{\text{AD}} := v_i \zeta_k^{\text{AD}}$$

mit

$$\zeta_k^{\text{AD}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j}$$

- Additiver Prädiktor** für eine Summe von Zuwächsen $Z_{i,k}$
 $:=$ Summe der Prädiktoren $Z_{i,k}^{\text{AD}}$.

Panning Modell (1)

Sei $\mathcal{F}_0 := \sigma(\{Z_{j,0}\}_{j \in \{0,1,\dots,n\}})$.

Das Panning Modell:

Es gibt unbekannte Parameter $\xi_1, \dots, \xi_n$ und $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ mit

$$E^{\mathcal{F}_0}(Z_{i,k}) = Z_{i,0}\xi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_0}(Z_{i,k}, Z_{j,l}) = \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

- Panning [2006]: *Measuring loss reserve uncertainty*.

Panning Modell (2)

- Die Parameter

$$\vartheta_k := \frac{\xi_k}{1 + \sum_{l=1}^n \xi_l} = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[\sum_{l=0}^n Z_{i,l}]}$$

sind unabhängig vom Anfalljahr i und bilden ein **Abwicklungsmuster für Anteile**.

- Panning Prädiktor** für einen nicht-beobachtbaren Zuwachs $Z_{i,k}$ ($i + k \geq n + 1$):

$$Z_{i,k}^{\text{PA}} := Z_{i,0} \xi_k^{\text{PA}}$$

mit

$$\xi_k^{\text{PA}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,0} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,0}^2}$$

- Panning Prädiktor** für eine Summe von Zuwächsen $Z_{i,k}$
:= Summe der Prädiktoren $Z_{i,k}^{\text{PA}}$.

Chain-Ladder Modell (1)

Das Chain-Ladder Verfahren und damit auch das Chain-Ladder Modell verwendet **Schadenstände**

$$S_{i,k} := \sum_{l=0}^k Z_{i,l}$$

anstelle von Zuwächsen.

Das Chain-Ladder Modell ist ein **sequentielles Modell**, da es aus einer Folge von Modellen für die einzelnen Abwicklungsjahre besteht.

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{F}_{k-1} := \sigma(\{S_{j,l}\}_{l \in \{0,1,\dots,k-1\}, j \in \{0,1,\dots,n-l\}})$.

Chain-Ladder Modell (2)

Das Chain-Ladder Modell:

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$
gibt es unbekannte Parameter φ_k und σ_k^2 mit

$$E^{\mathcal{F}_{k-1}}(S_{i,k}) = S_{i,k-1}\varphi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_{k-1}}(S_{i,k}, S_{j,k}) = S_{i,k-1}\sigma_k^2\delta_{i,j}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n - k + 1\}$.

- Mack [1993]: *Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates.*
- Mack [1997, 2002]: *Schadenversicherungsmathematik.*
- Schmidt & Schnaus [1996]: *An extension of Mack's model for the chain-ladder method.*

Chain-Ladder Modell (3)

► Die Parameter

$$\vartheta_k := \begin{cases} \prod_{l=1}^n \frac{1}{\varphi_l} & \text{für } k = 0 \\ \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l} - \prod_{l=k}^n \frac{1}{\varphi_l} & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$
$$= \frac{E[Z_{i,k}]}{E[\sum_{l=0}^n Z_{i,l}]}$$

sind unabhängig vom Anfalljahr i und bilden ein **Abwicklungsmuster für Anteile**.

Chain-Ladder Modell (4)

- ▶ **Chain-Ladder Prädiktor** für einen nicht-beobachtbaren Schadenstand $S_{i,k}$ ($i + k \geq n + 1$):

$$S_{i,k}^{\text{CL}} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l^{\text{CL}}$$

mit den **Chain-Ladder Faktoren**

$$\varphi_k^{\text{CL}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

- ▶ **Chain-Ladder Prädiktor** für einen nicht-beobachtbaren Zuwachs $Z_{i,k}$:

$$Z_{i,k}^{\text{CL}} := S_{i,k}^{\text{CL}} - S_{i,k-1}^{\text{CL}}$$

(mit $S_{i,n-i}^{\text{CL}} := S_{i,n-i}$)

- ▶ **Chain-Ladder Prädiktor** für eine Summe von Zuwächsen $Z_{i,k} := \text{Summe der Prädiktoren } Z_{i,k}^{\text{CL}}$.

Gemeinsamkeiten

Modell-Annahmen:

- ▶ In allen Modellen werden nur Annahmen an die Struktur der ersten und zweiten (bedingten) Momente getroffen.
- ▶ In allen Modellen ist die Struktur der (bedingten) Erwartungen und Kovarianzen multiplikativ mit
 - ▶ einem bekannten oder beobachtbaren Faktor für das Anfalljahr und
 - ▶ einem unbekannten Faktor für das Abwicklungsjahr

Probleme:

- ▶ Sind die in diesen Modellen verwendeten Prädiktoren in einem bestimmten Sinn optimal?
- ▶ Gibt es eine Begründung dafür, als Prädiktor für eine Summe von Zuwächsen die Summe der Prädiktoren der Summanden zu verwenden?

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Lineares Modell (1)

Wir betrachten einen Zufallsvektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$$

wobei

- ▶ der Zufallsvektor $\mathbf{X}_1$ beobachtbar ist und
- ▶ der Zufallsvektor $\mathbf{X}_2$ nicht-beobachtbar ist.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{var}[\mathbf{X}] &= \text{var} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \text{var}[\mathbf{X}_1] & \text{cov}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \\ \text{cov}[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1] & \text{var}[\mathbf{X}_2] \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lineares Modell (2)

Das lineare Modell

- ▶ Es gibt bekannte Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ sowie einen unbekannten Parameter(vektor) β mit

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta$$

- ▶ $\mathbf{A}_1$ hat vollen Spaltenrang und $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \text{var}[\mathbf{X}_1]$ ist invertierbar.

Die Zielgröße für die Prognose ist ein Zufallsvektor $\mathbf{T}$ der Form

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\beta + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2$$

mit Matrizen $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ passender Dimension.

- Hamer [1999]: *Loss prediction by generalized least squares – Discussion of Halliwell [1996]*.

Motivation aus der Schadenreservierung (1)

Die beobachtbaren und die nicht-beobachtbaren Zuwächse $Z_{i,k}$ werden in der Form

$$\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ \vdots \\ Z_{n,0} \\ \hline Z_{0,1} \\ \vdots \\ Z_{n-1,1} \\ \hline \vdots \\ \hline Z_{0,n-1} \\ Z_{1,n-1} \\ \hline Z_{0,n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} \hline Z_{n,1} \\ \vdots \\ \hline Z_{2,n-1} \\ \vdots \\ \hline Z_{n,n-1} \\ \hline Z_{1,n} \\ \vdots \\ \hline Z_{n,n} \end{pmatrix}$$

angeordnet.

Motivation aus der Schadenreservierung (2)

Für die nicht-beobachtbaren Schadenstände ($i + k \geq n + 1$)

$$S_{i,k} := \sum_{l=0}^k Z_{i,l}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} S_{i,k} &= \sum_{l=0}^{n-i} Z_{i,l} + \sum_{l=n-i+1}^k Z_{i,l} \\ &= \mathbf{d}'_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{d}'_2 \mathbf{X}_2 \end{aligned}$$

mit geeigneten Vektoren $\mathbf{d}_1$ und $\mathbf{d}_2$.

Zulässige Prädiktoren und Prognosefehler

Ein beobachtbarer Zufallsvektor $\hat{\mathbf{T}}$ heißt **zulässiger Prädiktor** für $\mathbf{T}$, wenn es eine Matrix $\mathbf{Q}$ gibt mit

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1$$

und

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 = \mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2$$

Lemma

- ▶ Jeder zulässige Prädiktor für $\mathbf{T}$ ist linear in $\mathbf{X}_1$.
- ▶ Jeder zulässige Prädiktor für $\mathbf{T}$ ist erwartungstreu.

Der **Prognosefehler** eines Prädiktors $\hat{\mathbf{T}}$ für $\mathbf{T}$ ist definiert als $\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}$ und der **erwartete quadratische Prognosefehler** für $\hat{\mathbf{T}}$ ist definiert als

$$E[(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T})'(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T})]$$

Prognosefehler und Gauss–Markov Prädiktor

Lemma

Für jeden zulässigen Prädiktor $\hat{\mathbf{T}}$ für $\mathbf{T}$ gilt

$$E[(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T})'(\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T})] = \text{trace}(\text{var}[\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}])$$

Der erwartete quadratische Prognosefehler eines zulässigen Prädiktors ist daher durch die Varianz des Prognosefehlers bestimmt.

Ein zulässiger Prädiktor für $\mathbf{T}$ heißt **Gauss–Markov Prädiktor** für $\mathbf{T}$, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler über alle zulässigen Prädiktoren für $\mathbf{T}$ minimiert.

Gauss–Markov Theorem (1)

Gauss–Markov Theorem

- ▶ Es gibt genau einen Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{T}^{\text{GM}}$ für $\mathbf{T} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2$ und es gilt

$$\mathbf{T}^{\text{GM}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2^*$$

mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^* &:= (\mathbf{A}_1'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2^* &:= \mathbf{A}_2\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{\beta}^*)\end{aligned}$$

- ▶ Es gilt

$$\begin{aligned}\text{var}[\mathbf{T}^{\text{GM}} - \mathbf{T}] &= (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)\text{var}[\boldsymbol{\beta}^*](\mathbf{C} + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)' \\ &\quad + \mathbf{D}_2(\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12})\mathbf{D}_2'\end{aligned}$$

mit $\text{var}[\boldsymbol{\beta}^*] = (\mathbf{A}_1'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{A}_1)^{-1}$.

Gauss–Markov Theorem (2)

Spezialfälle:

- Für den Gauss–Markov Schätzer β^{GM} von β gilt

$$\beta^{\text{GM}} = (\mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}'_1 \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{X}_1$$

- Für den Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{X}_2^{\text{GM}}$ für $\mathbf{X}_2$ gilt

$$\mathbf{X}_2^{\text{GM}} = \mathbf{A}_2 \beta^{\text{GM}} + \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \beta^{\text{GM}})$$

Folgerung (Linearität der Gauss–Markov Prognose)

Für den Gauss–Markov Prädiktor $(\mathbf{DT})^{\text{GM}}$ für $\mathbf{DT}$ mit einer Matrix $\mathbf{D}$ passender Dimension gilt

$$(\mathbf{DT})^{\text{GM}} = \mathbf{D} \mathbf{T}^{\text{GM}}$$

Insbesondere ist

der Gauss–Markov Prädiktor einer Summe gleich
der Summe der Gauss–Markov Prädiktoren.

Bedingtes Lineares Modell

Bestimmte Modelle der Schadenreservierung (wie das Panning Modell) sind **bedingte lineare Modelle**.

Rezept:

- ▶ Betrachte eine Unter- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die die durch bestimmte beobachtbare Zufallsvariable gegebene Information darstellt.
- ▶ Ersetze die Momente erster und zweiter Ordnung durch $\mathcal{G}$ -bedingte Momente.
- ▶ Ersetze die Matrizen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{Q}$ durch $\mathcal{G}$ -messbare Zufallsmatrizen.

Dann lässt sich das Gauss-Markov Theorem für das (unbedingte) lineare Modell auf das $\mathcal{G}$ -bedingte lineare Modell übertragen.

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Wir betrachten die folgenden univariaten Modelle der Schadenreservierung:

- ▶ Das univariate additive Modell.
- ▶ Das univariate Panning Modell.
- ▶ Das univariate Chain–Ladder Modell.

Univariates Additives Modell (1)

Das univariate additive Modell

Es gibt bekannte Volumenmaße $v_0, v_1, \dots, v_n$ und unbekannte Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ und $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ mit

$$E[Z_{i,k}] = v_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[Z_{i,k}, Z_{j,l}] = v_i \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Univariates Additives Modell (2)

Im univariaten additiven Modell gilt

$$E \left[\begin{pmatrix} Z_{0,0} \\ \vdots \\ Z_{n,0} \\ \hline Z_{0,1} \\ \vdots \\ Z_{n-1,1} \\ \hline \vdots \\ \hline Z_{0,n-1} \\ Z_{1,n-1} \\ \hline Z_{0,n} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & v_0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{n-1} & & 0 & 0 \\ \hline \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & & v_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{n-1} \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

und damit $E[\mathbf{X}_1] = \mathbf{A}_1\beta$. Insbesondere hat $\mathbf{A}_1$ vollen Spaltenrang.

Univariates Additives Modell (3)

Des weiteren gilt

$$E \left[\begin{pmatrix} \frac{Z_{n,1}}{Z_{2,n-1}} \\ \vdots \\ \frac{Z_{n,n-1}}{Z_{1,n}} \\ \vdots \\ Z_{n,n} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & v_n & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & v_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & v_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{n-1} \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

und damit $E[\mathbf{X}_2] = \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\beta}$.

Univariates Additives Modell (4)

Außerdem gilt

$$\Sigma_{11} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} v_0\sigma_0^2 & & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & v_n\sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & v_0\sigma_1^2 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & v_{n-1}\sigma_1^2 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & v_0\sigma_{n-1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & v_1\sigma_{n-1}^2 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & v_0\sigma_n^2 \end{array} \right)$$

und $\Sigma_{12} = \mathbf{O}$. Insbesondere ist Σ_{11} invertierbar.

Damit ist das univariate additive Modell ein lineares Modell.

Univariates Additives Modell (5)

Gauss-Markov Theorem

Für den Gauss-Markov Schätzer ζ_k^{GM} für ζ_k gilt

$$\zeta_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} = \zeta_k^{\text{AD}}$$

und

$$\text{cov}[\zeta_k^{\text{GM}}, \zeta_l^{\text{GM}}] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \delta_{k,l}$$

Insbesondere gilt

$$E[(\zeta_k^{\text{GM}} - \zeta_k)^2] = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j}$$

Univariates Additives Modell (6)

Folgerung

Für den Gauss–Markov Prädiktor $Z_{i,k}^{\text{GM}}$ für den Zuwachs $Z_{i,k}$ (mit $i + k \geq n + 1$) gilt

$$Z_{i,k}^{\text{GM}} = v_i \zeta_k^{\text{GM}} = Z_{i,k}^{\text{AD}}$$

und

$$\text{cov}[Z_{i,k}^{\text{GM}} - Z_{i,k}, Z_{j,l}^{\text{GM}} - Z_{j,l}] = v_i v_j \left(\frac{1}{\sum_{h=0}^{n-k} v_h} + \frac{1}{v_i} \delta_{i,j} \right) \sigma_k^2 \delta_{k,l}$$

Insbesondere gilt

$$E[(Z_{i,k}^{\text{GM}} - Z_{i,k})^2] = v_i^2 \left(\frac{1}{\sum_{h=0}^{n-k} v_h} + \frac{1}{v_i} \right) \sigma_k^2$$

Univariates Additives Modell (7)

Bemerkungen:

- ▶ Die Gauss–Markov Prädiktoren der nicht-beobachtbaren Zuwächse stimmen mit den im additiven Verfahren verwendeten Prädiktoren überein.
- ▶ Reserven sind Summen von nicht-beobachtbaren Zuwächsen. Da die Gauss–Markov Prognose linear ist, stimmen die Gauss–Markov Prädiktoren der Reserven mit der Summe der Gauss–Markov Prädiktoren der zugehörigen Zuwächse überein.

Univariates Additives Modell (8)

Folgerung

- Für den Gauss–Markov Prädiktor R_i^{GM} der Anfalljahrreserve R_i gilt

$$R_i^{\text{GM}} = \sum_{k=n-i+1}^n v_i \zeta_k^{\text{GM}}$$

- Für den Gauss–Markov Prädiktor $R_{(c)}^{\text{GM}}$ der Kalenderjahrreserve $R_{(c)}$ gilt

$$R_{(c)}^{\text{GM}} = \sum_{i=c-n}^n v_i \zeta_{c-i}^{\text{GM}}$$

- Für den Gauss–Markov Prädiktor R^{GM} der Gesamtreserve R gilt

$$R^{\text{GM}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=n-i+1}^n v_i \zeta_k^{\text{GM}}$$

Univariates Additives Modell (9)

Schätzung der Varianzparameter:

Lemma

Für alle $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ist die Zufallsvariable

$$\widehat{\sigma}_k^2 := \frac{1}{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} v_j \left(\frac{Z_{j,k}}{v_j} - \zeta_k^{\text{GM}} \right)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ_k^2 .

Die Konstruktion eines Schätzers für σ_n^2 kann durch Extrapolation erfolgen.

Univariates Additives Modell (10)

Prognosefehler:

- ▶ Für die Prognosefehler aller Zuwächse, Schadenstände und Reserven lassen sich exakte Formeln herleiten.
- ▶ Schätzer für Prognosefehler ergeben sich aus den exakten Formeln mit Hilfe der Schätzer für die Varianz-Parameter σ_k^2 .

Allgemein:

- ▶ Die Gauss-Markov Prognose im univariaten additiven Modell begründet das additive Verfahren.
- ▶ Die Gauss-Markov Prognose im univariaten additiven Modell liefert wichtige zusätzliche Ergebnisse.

Univariates Panning Modell

Sei $\mathcal{F}_0 := \sigma(\{Z_{j,0}\}_{j \in \{0,1,\dots,n\}})$.

Das univariate Panning Modell:

Es gibt unbekannte Parameter $\xi_1, \dots, \xi_n$ und $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ mit

$$E^{\mathcal{F}_0}(Z_{i,k}) = Z_{i,0}\xi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_0}(Z_{i,k}, Z_{j,l}) = \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

- ▶ Das univariate Panning Modell ist ein bedingtes lineares Modell.
- ▶ Ergebnisse analog zum univariaten additiven Modell.
 - Ludwig & Schmeißer & Thänert [2009]: *Linear Models in Loss Reserving*.
 - Ludwig & Schmidt [2010]: *Gauss–Markov loss prediction in a linear model*.

Univariates Chain–Ladder Modell (1)

Das univariate Chain–Ladder Modell verwendet **Schadenstände**

$$S_{i,k} := \sum_{l=0}^k Z_{i,l}$$

anstelle von Zuwächsen.

Das univariate Chain–Ladder Modell ist ein **sequentielles Modell**, da es aus einer Folge von bedingten linearen Modellen für die einzelnen Abwicklungsjahre besteht.

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{F}_{k-1} := \sigma(\{S_{j,l}\}_{l \in \{0,1,\dots,k-1\}, j \in \{0,1,\dots,n-l\}})$.

Univariates Chain–Ladder Modell (2)

Das univariate Chain–Ladder Modell:

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$
gibt es unbekannte Parameter φ_k und σ_k^2 mit

$$E^{\mathcal{F}_{k-1}}(S_{i,k}) = S_{i,k-1}\varphi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_{k-1}}(S_{i,k}, S_{j,k}) = S_{i,k-1}\sigma_k^2\delta_{i,j}$$

für alle $i, j \in \{0, 1, \dots, n - k + 1\}$.

Univariates Chain-Ladder Modell (3)

Gauss-Markov Theorem

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$
gilt für den $\mathcal{F}_{k-1}$ -bedingten Gauss-Markov Schätzer φ_k^{GM} von φ_k

$$\varphi_k^{\text{GM}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \varphi_k^{\text{CL}}$$

und

$$\text{var}^{\mathcal{F}_{k-1}}(\varphi_k^{\text{GM}}) = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

Univariates Chain-Ladder Modell (4)

Folgerung

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$
gilt für den $\mathcal{F}_{k-1}$ -bedingten Gauss-Markov Prädiktor $S_{n-k+1,k}^{\text{GM}}$ für
den Schadenstand $S_{n-k+1,k}$

$$S_{n-k+1,k}^{\text{GM}} = S_{n-k+1,k-1} \varphi_k^{\text{GM}} = S_{n-k+1,k}^{\text{CL}}$$

und

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{F}_{k-1}} \left((S_{n-k+1,k}^{\text{GM}} - S_{n-k+1,k})^2 \right) \\ = S_{n-k+1,k-1}^2 \left(\frac{1}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} + \frac{1}{S_{n-k+1,k-1}} \right) \sigma_k^2 \end{aligned}$$

Aus der Folgerung ergibt sich $Z_{n-k+1,k}^{\text{GM}} = S_{n-k+1,k}^{\text{GM}} - S_{n-k+1,k-1}$.

Univariates Chain–Ladder Modell (5)

Probleme:

- ▶ Keine Gauss–Markov Eigenschaft der Chain–Ladder Prädiktoren für die Schadenstände $S_{i,k}$ oder Zuwächse $Z_{i,k}$ mit $i + k \geq n + 2$.
- ▶ Keine Gauss–Markov Eigenschaft der Chain–Ladder Prädiktoren

$$R_i^{\text{CL}} := S_{i,n}^{\text{CL}} - S_{i,n-i}$$

für die Anfalljahrreserven $R_i := S_{i,n} - S_{i,n-i}$.

- ▶ Dies gilt auch für die Chain–Ladder Prädiktoren für die Kalenderjahrreserven und die Gesamtreserve.
- ▶ Zur Konstruktion von Schätzern für Prognosefehler scheinen Approximationen unerlässlich zu sein.

Diese Probleme sind sämtlich im sequentiellen Charakter des univariaten Chain–Ladder Modells begründet.

Panning Modell als Alternative zum Chain–Ladder Modell?

Vorteile univariater linearer Modelle

- ▶ Die Gauss–Markov Prognose ist **linear**.
- ▶ Insbesondere ist der Gauss–Markov Prädiktor einer Reserve die Summe der Gauss–Markov Prädiktoren der Zuwächse, aus denen die Reserve besteht.
- ▶ Die Gauss–Markov Prognose liefert **exakte Formeln** für die Prognosefehler.
(Im Chain–Ladder Modell betrifft dies nur die Zuwächse und Schadenstände des ersten nicht–beobachtbaren Kalenderjahres.)
- ▶ Daraus ergibt sich eine einfache Konstruktion von Schätzern für Prognosefehler.
(Im Chain–Ladder Modell betrifft dies nur die Zuwächse und Schadenstände des ersten nicht–beobachtbaren Kalenderjahres.)

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Multivariate Modelle der Schadenreservierung (1)

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

- ▶ betreffen einen Bestand mit M Teilbeständen oder Datenarten,
- ▶ berücksichtigen Korrelationen zwischen den Teilbeständen oder Datenarten, und
- ▶ verwenden mehr Information als jeder einzelne Teilbestand oder jede einzelne Datenart.

Notation:

$$\mathbf{z}_{i,k} = \begin{pmatrix} z_{i,k}^{(1)} \\ \vdots \\ z_{i,k}^{(M)} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet das Superskript den Teilbestand oder die Datenart.

Multivariate Modelle der Schadenreservierung (2)

Wir betrachten die folgenden multivariaten Modelle der Schadenreservierung:

- ▶ Das multivariate additive Modell.
- ▶ Das multivariate Panning Modell.
- ▶ Das multivariate Chain-Ladder Modell.

Multivariates Additives Modell (1)

Das multivariate additive Modell

Es gibt

- ▶ bekannte positiv definite symmetrische Matrizen $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$,
- ▶ unbekannte Parameter $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ und
- ▶ positiv definite symmetrische Matrizen $\boldsymbol{\Sigma}_0, \boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_n$

mit

$$E[\mathbf{Z}_{i,k}] = \mathbf{V}_i \zeta_k$$

und

$$\text{cov}[\mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{Z}_{j,l}] = \mathbf{V}_i^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{V}_i^{1/2} \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

- ▶ Das multivariate additive Modell ist ein lineares Modell.
 - Hess & Schmidt & Zocher [2006]: *Multivariate loss prediction in the multivariate additive model.*

Multivariates Additives Modell (2)

Gauss–Markov Theorem

Für den Gauss–Markov Schätzer ζ_k^{GM} für ζ_k gilt

$$\zeta_k^{\text{GM}} = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} (\mathbf{v}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2}) \mathbf{v}_j^{-1} \mathbf{z}_{j,k}$$

und

$$\text{cov}[\zeta_k^{\text{GM}}, \zeta_l^{\text{GM}}] = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_j^{1/2} \right)^{-1} \delta_{k,l}$$

Multivariates Additives Modell (3)

Folgerung

Für den Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{Z}_{i,k}^{\text{GM}}$ für $\mathbf{Z}_{i,k}$ gilt

$$\mathbf{Z}_{i,k}^{\text{GM}} = \mathbf{V}_i \boldsymbol{\zeta}_k^{\text{GM}}$$

und

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{Z}_{i,k}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{Z}_{j,l}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{j,l}] \\ = \mathbf{V}_i \left(\left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{V}_j^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_j^{1/2} \right)^{-1} + (\mathbf{V}_i^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \mathbf{V}_i^{1/2})^{-1} \delta_{i,j} \right) \mathbf{V}_j \delta_{k,l} \end{aligned}$$

Entsprechende Ergebnisse erhält man für Reserven.

Multivariates Additives Modell (4)

Schätzung der Varianzen Σ_k :

- Der Zufallsvektor

$$\tilde{\zeta}_k := \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{z}_{j,k}$$

(Gauss–Markov Schätzer im Fall $\Sigma_k = \mathbf{I}$) ist ein zulässiger und damit erwartungstreuer linearer Schätzer für ζ_k .

- Die Zufallsmatrix

$$\tilde{\Sigma}_k := \frac{1}{n-k} \sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{v}_j^{-1/2} \left(\mathbf{z}_{j,k} - \mathbf{v}_j \tilde{\zeta}_k \right) \left(\mathbf{z}_{j,k} - \mathbf{v}_j \tilde{\zeta}_k \right)' \mathbf{v}_j^{-1/2}$$

ist positiv semidefinit mit erwartungstreuer Diagonale.

Multivariates Panning Modell

Sei $\mathcal{F}_0 := \sigma(\{\mathbf{Z}_{j,0}\}_{j \in \{0,1,\dots,n\}})$ und $\mathbf{Q}_i := \text{diag}(\mathbf{Z}_{i,0})$.

Das multivariate Panning Modell

Es gibt unbekannte Parameter $\xi_1, \dots, \xi_n$ und positiv definite symmetrische Matrizen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ mit

$$E^{\mathcal{F}_0}[\mathbf{Z}_{i,k}] = \mathbf{Q}_i \xi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_0}[\mathbf{Z}_{i,k}, \mathbf{Z}_{j,l}] = \Sigma_k \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

- ▶ Das multivariate Panning Modell ist ein bedingtes lineares Modell.
- ▶ Ergebnisse analog zum multivariaten additiven Modell.
- Ludwig & Schmeißer & Thänert [2009]: *Linear Models in Loss Reserving*.

Multivariates Chain–Ladder Modell (1)

Das multivariate Chain–Ladder Modell verwendet **Schadenstände**

$$\mathbf{S}_{i,k} := \sum_{l=0}^k \mathbf{Z}_{i,l}$$

anstelle von Zuwächsen. Sei

$$\mathbf{\Delta}_{i,k} := \text{diag}(\mathbf{S}_{i,k})$$

Das multivariate Chain–Ladder Modell ist ein **sequentielles Modell**, da es aus einer Folge von bedingten linearen Modellen für die einzelnen Abwicklungsjahre besteht.

Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{F}_{k-1} := \sigma(\{\mathbf{S}_{j,l}\}_{l \in \{0,1,\dots,k-1\}, j \in \{0,1,\dots,n-l\}})$.

Multivariates Chain–Ladder Modell (2)

Das multivariate Chain–Ladder Modell

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$
gibt es einen unbekannten Parameter φ_k und eine positiv definite
symmetrische Matrix Σ_k mit

$$E^{\mathcal{F}_{k-1}}(\mathbf{S}_{i,k}) = \Delta_{i,k-1} \varphi_k$$

und

$$\text{cov}^{\mathcal{F}_{k-1}}(\mathbf{S}_{i,k}, \mathbf{S}_{j,k}) = \Delta_{i,k-1}^{1/2} \Sigma_k \Delta_{j,k-1}^{1/2} \delta_{i,j}$$

- ▶ Das multivariate Chain–Ladder Modell ist ein **sequentielles** lineares Modell.
- Braun [2004]: *The prediction error of the chain–ladder method applied to correlated run–off triangles.*
- Kremer [2005]: *The correlated chain–ladder method ...*
- Pröhl & Schmidt [2005]: *Multivariate chain–ladder.*

Multivariates Chain-Ladder Modell (3)

Gauss-Markov Theorem

Für jedes Abwicklungsjahr $k \in \{1, \dots, n\}$

gilt für den $\mathcal{F}_{k-1}$ -bedingten Gauss-Markov Schätzer φ_k^{GM} von φ_k

$$\varphi_k^{\text{GM}} = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} (\Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2}) \Delta_{j,k-1}^{-1} \mathbf{S}_{j,k}$$

und

$$\text{var}^{\mathcal{F}_{k-1}}(\varphi_k^{\text{GM}}) = \left(\sum_{j=0}^{n-k} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \Sigma_k^{-1} \Delta_{j,k-1}^{1/2} \right)^{-1}$$

Wie im univariaten Fall:

Gauss-Markov Prognose nur für das erste nicht-beobachtbare Kalenderjahr.

Vorteile multivariater linearer Modelle

- ▶ Die Gauss–Markov Prognose ist **linear**.
- ▶ Die Gauss–Markov Prognose liefert **exakte Formeln** für die Prognosefehler.
(Im Chain–Ladder Modell betrifft dies nur die Zuwächse und Schadenstände des ersten nicht–beobachtbaren Kalenderjahres.)
- ▶ Die Gauss–Markov Prognose im multivariaten linearen Modell liefert **konsistente Prognosen** für den Gesamtbestand und seine Teilbestände.
 - Ajne [1994]: *Additivity of chain–ladder projections*.
- ▶ **Problem:** Für späte Abwicklungsjahre kann der natürliche Schätzer der Varianz singulär sein.

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Beispiel (1)

Analyse von Daten eines Bestandes der Hannover Rück mit vier Teilbeständen:

- ▶ General liability non-prop
- ▶ Motor non-prop
- ▶ Property non-prop
- ▶ Aviation

Vergleich der Ergebnisse aus der Verwendung

- ▶ univariater Modelle und Methoden für die einzelnen Teilbestände und
- ▶ multivariater Modelle und Methoden für den vierdimensionalen Gesamtbestand.

Beispiel (2)

Univariate Modelle

Modell	Gesamtreserve		1. Kalenderjahr	
	GM	Fehler	GM	Fehler
	Portfolio 1: General liability non-prop			
Additives Modell	1051	233	296	106
Panning Modell	421	141	138	78
Chain-Ladder Modell	510	192	169	-
	Portfolio 2: Motor non-prop			
Additives Modell	227	62	85	14
Panning Modell	132	42	56	13
Chain-Ladder Modell	151	50	62	-
	Portfolio 3: Property non-prop			
Additives Modell	59	45	60	37
Panning Modell	72	43	57	26
Chain-Ladder Modell	60	52	65	-
	Portfolio 4: Aviation			
Additives Modell	133	73	58	46
Panning Modell	114	70	58	54
Chain-Ladder Modell	115	66	59	-

Beispiel (3)

Multivariate Modelle

Modell	Gesamtreserve		1. Kalenderjahr	
	GM	Fehler	GM	Fehler
	Portfolio 1: General liability non-prop			
Additives Modell	1034	229	297	105
Panning Modell	425	136	139	77
Chain-Ladder Modell	437	193	164	-
	Portfolio 2: Motor non-prop			
Additives Modell	230	61	87	14
Panning Modell	138	41	57	13
Chain-Ladder Modell	153	27	63	-
	Portfolio 3: Property non-prop			
Additives Modell	59	45	61	37
Panning Modell	68	42	55	26
Chain-Ladder Modell	55	42	62	-
	Portfolio 4: Aviation			
Additives Modell	140	71	62	46
Panning Modell	100	69	50	53
Chain-Ladder Modell	108	66	54	-

Beispiel (4)

Univariate Modelle

Modell	Gesamtreserve		1. Kalenderjahr	
	GM	Fehler	GM	Fehler
	Gesamt-Portfolio			
Additives Modell	1470	413	499	203
Panning Modell	739	296	309	171
Chain-Ladder Modell	836	360	355	-

Multivariate Modelle

Modell	Gesamtreserve		1. Kalenderjahr	
	GM	Fehler	GM	Fehler
	Gesamt-Portfolio			
Additives Modell	1463	252	507	121
Panning Modell	731	163	301	98
Chain-Ladder Modell	753	209	343	-

Multivariate vs. univariate Modelle

- ▶ **Fakt 1:** Die Gauss–Markov Prognose im multivariaten linearen Modell liefert **konsistente Prognosen** für den Gesamtbestand und seine Teilbestände.
- ▶ **These 1:** Die multivariaten Prädiktoren weichen oft (oder meistens?) nur geringfügig von den univariaten Prädiktoren ab.
- ▶ **Fakt 2:** Die Gauss–Markov Prognose liefert **exakte Formeln** für die Prognosefehler.
(Im Chain–Ladder Modell betrifft dies nur die Zuwächse und Schadenstände des ersten nicht–beobachtbaren Kalenderjahres.)
- ▶ **These 2:** Die multivariaten Prädiktoren **reduzieren den Prognosefehler** für den Gesamtbestand.
- ▶ **Problem:** Für späte Abwicklungsjahre kann der natürliche Schätzer der Varianz singulär sein.

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Lineares Modell mit linearer Nebenbedingung (1)

Gauss–Markov Prognose im linearen Modell ist auch dann möglich, wenn der unbekannte Parameter einer linearen Nebenbedingung unterliegt.

Formal ergibt sich damit eine Erweiterung der Modell–Gleichungen zu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ E[\mathbf{X}_1] \\ E[\mathbf{X}_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta$$

Lineares Modell mit linearer Nebenbedingung (2)

Das lineare Modell unter einer linearen Nebenbedingung

- ▶ Es gibt bekannte Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ sowie einen unbekannten Parameter β mit

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta$$

- ▶ Es gibt eine bekannte Matrix $\mathbf{H}$ und einen bekannten Vektor $\mathbf{h}$ mit

$$\mathbf{H}\beta = \mathbf{h}$$

- ▶ $\mathbf{A}_1$ hat vollen Spaltenrang, $\mathbf{H}$ hat vollen Zeilenrang, und $\Sigma_{11} = \text{var}[\mathbf{X}_1]$ ist invertierbar.

- Kloberdanz & Schmidt [2008]: *Prediction in the linear model under a linear constraint.*

Lineares Modell mit linearer Nebenbedingung (3)

Ein beobachtbarer Zufallsvektor $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H},\mathbf{h}}$ heißt **($\mathbf{H}, \mathbf{h}$)–zulässiger Prädiktor** für $\mathbf{T}$, wenn es Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ gibt mit

$$\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{H},\mathbf{h}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1 + \mathbf{R}\mathbf{h}$$

und

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{H} = \mathbf{C} + \mathbf{D}_1\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{A}_2$$

Lemma

- ▶ Jeder **($\mathbf{H}, \mathbf{h}$)–zulässige Prädiktor** für $\mathbf{T}$ ist linear in $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{h}$.
- ▶ Jeder **($\mathbf{H}, \mathbf{h}$)–zulässige Prädiktor** für $\mathbf{T}$ ist erwartungstreu.

Ein **($\mathbf{H}, \mathbf{h}$)–zulässiger Prädiktor** für $\mathbf{T}$ heißt **($\mathbf{H}, \mathbf{h}$)–Gauss–Markov Prädiktor** für $\mathbf{T}$, wenn er den erwarteten quadratischen Prognosefehler über alle **($\mathbf{H}, \mathbf{h}$)–zulässigen Prädiktoren** für $\mathbf{T}$ minimiert.

Lineares Modell mit linearer Nebenbedingung (4)

Gauss–Markov Theorem unter einer linearen Nebenbedingung

- Es gibt genau einen $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ –Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{T}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^{\text{GM}}$ für $\mathbf{T} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_2$ und es gilt

$$\mathbf{T}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^{\text{GM}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^* + \mathbf{D}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{D}_2\mathbf{X}_{2; \mathbf{H}, \mathbf{h}}^*$$

mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^* &:= \boldsymbol{\beta}^* - (\mathbf{A}_1' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}' (\mathbf{H} (\mathbf{A}_1' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}')^{-1} (\mathbf{H} \boldsymbol{\beta}^* - \mathbf{h}) \\ \mathbf{X}_{2; \mathbf{H}, \mathbf{h}}^* &:= \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^* + \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^*) \\ \boldsymbol{\beta}^* &:= (\mathbf{A}_1' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{X}_1\end{aligned}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}\text{var}[\mathbf{T}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^{\text{GM}} - \mathbf{T}] &= (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1) \text{var}[\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^*] (\mathbf{C} + \mathbf{D}_2 \mathbf{A}_2 - \mathbf{D}_2 \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)' \\ &\quad + \mathbf{D}_2 (\boldsymbol{\Sigma}_{22} - \boldsymbol{\Sigma}_{21} \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{12}) \mathbf{D}_2'\end{aligned}$$

$$\text{mit } \text{var}[\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}}^*] = (\mathbf{I} - (\mathbf{A}_1' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}' (\mathbf{H} (\mathbf{A}_1' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}')^{-1} \mathbf{H}) \text{var}[\boldsymbol{\beta}^*]$$

Gliederung

Einleitung

Beispiele

Lineare Modelle

Univariate Modelle der Schadenreservierung

Multivariate Modelle der Schadenreservierung

Vergleich Univariate/Multivariate Modelle

Lineares Modell unter einer linearen Nebenbedingung

Paid/Incurred Problem

Paid/Incurred Problem (1)

Anstelle eines Bestandes mit mehreren Teilbeständen betrachten wir nun einen Bestand mit zwei Arten von Daten:

- Zuwächse der Schadenzahlungen (paid losses):

$$Z_{i,k}^{(p)}$$

- Zuwächse der Schadenaufwände (incurred losses):

$$Z_{i,k}^{(q)}$$

- Bivariate Zuwächse:

$$\mathbf{z}_{i,k} := \begin{pmatrix} Z_{i,k}^{(p)} \\ Z_{i,k}^{(q)} \end{pmatrix}$$

Paid/Incurred Problem (2)

Das **Paid/Incurred Problem** besteht darin, dass die Prädiktoren, die

- ▶ auf der Grundlage von Schadenzahlungen bzw.
- ▶ auf der Grundlage von Schadenaufwänden

gebildet werden, im allgemeinen nicht übereinstimmen.

Damit stellt sich die Aufgabe, auf der Grundlage bivariater stochastischer Modelle Prognose-Verfahren zu entwickeln, die die Differenz zwischen diesen Prädiktoren reduzieren.

- Halliwell [1997]: *Conjoint prediction of paid and incurred losses.*
- Quarg & Mack [2004]: *Munich chain-ladder.*
- Kloberdanz & Schmidt [2008]: *Loss prediction in a linear model under a linear constraint.*
- Ludwig & Schmeisser & Thänert [2009]: *Linear Models in Loss Reserving.*
- Halliwell [2009]: *Modeling paid and incurred losses together.*

Paid/Incurred Problem (3)

Eine natürliche Forderung zur Lösung des Paid/Incurred Problem ist die Bedingung, dass die erwarteten Endschadenstände

- ▶ der Schadenzahlungen und
- ▶ der Schadenaufwände

übereinstimmen.

Dies ist die **Paid/Incurred Bedingung**

$$E\left[S_{i,n}^{(p)}\right] = E\left[S_{i,n}^{(q)}\right]$$

mit $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Additives Paid/Incurred Modell (1)

Die Anpassung des bivariaten additiven Modells auf das Paid/Incurred Problem führt zunächst auf die Vereinfachung

$$\mathbf{V}_i = v_i \mathbf{I}$$

und damit auf die Modell-Gleichungen

$$E \left[\begin{pmatrix} Z_{i,k}^{(p)} \\ Z_{i,k}^{(q)} \end{pmatrix} \right] = v_i \begin{pmatrix} \zeta_k^{(p)} \\ \zeta_k^{(q)} \end{pmatrix}$$

und

$$\text{cov} \left[\begin{pmatrix} Z_{i,k}^{(p)} \\ Z_{i,k}^{(q)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z_{j,l}^{(p)} \\ Z_{j,l}^{(q)} \end{pmatrix} \right] = v_i \begin{pmatrix} \sigma_k^{(p,p)} & \sigma_k^{(p,q)} \\ \sigma_k^{(p,q)} & \sigma_k^{(q,q)} \end{pmatrix} \delta_{i,j} \delta_{k,l}$$

Additives Paid/Incurred Modell (2)

Des weiteren führt die **Paid/Incurred Bedingung**

$$E \left[S_{i,n}^{(p)} - S_{i,n}^{(q)} \right] = 0$$

auf

$$\sum_{l=0}^n \left(\zeta_l^{(p)} - \zeta_l^{(q)} \right) = 0$$

und damit auf die **lineare Nebenbedingung**

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h}$$

mit $\mathbf{H} := \left(\mathbf{s}' \mid \cdots \mid \mathbf{s}' \right)$ und $\mathbf{h} := \mathbf{0}$ sowie

$$\mathbf{s} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Additives Paid/Incurred Modell (3)

Sei

$$\mathbf{a}_k := \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{s}$$

Gauss–Markov Theorem

Für den $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ –Gauss–Markov Schätzer $\hat{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}$ von ζ_k gilt

$$\hat{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}} = \zeta_k^{\text{GM}} - \frac{\sum_{l=0}^n \mathbf{s}' \zeta_l^{\text{GM}}}{\sum_{l=0}^n \mathbf{s}' \mathbf{a}_l} \mathbf{a}_k$$

und

$$\text{cov}[\hat{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}, \hat{\zeta}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; l}^{\text{GM}}] = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-k} v_j} \mathbf{\Sigma}_k \delta_{k, l} - \frac{1}{\sum_{l=0}^n \mathbf{s}' \mathbf{a}_l} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l'$$

Additives Paid/Incurred Modell (4)

Folgerung

Für den $(\mathbf{H}, \mathbf{h})$ –Gauss–Markov Prädiktor $\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}}$ von $\mathbf{Z}_{i, k}$ gilt

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}} = v_i \zeta_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}$$

und

$$\begin{aligned} & \text{cov} [\mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; i, k}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{i, k}, \mathbf{Z}_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; j, l}^{\text{GM}} - \mathbf{Z}_{j, l}] \\ &= v_i v_j \text{cov} [\zeta_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; k}^{\text{GM}}, \zeta_{\mathbf{H}, \mathbf{h}; l}^{\text{GM}}] + v_i \boldsymbol{\Sigma}_k \delta_{i, j} \delta_{k, l} \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität der Gauss–Markov Prognose ergeben sich daraus die Prädiktoren der Endschatenstände und aller Reserven sowie deren Prognosefehler.

Panning Paid/Incurred Modell

Die Anpassung des bivariaten Panning Modells an das Paid/Incurred Problem erfolgt analog und liefert analoge Ergebnisse.

Chain-Ladder Paid/Incurred Modell

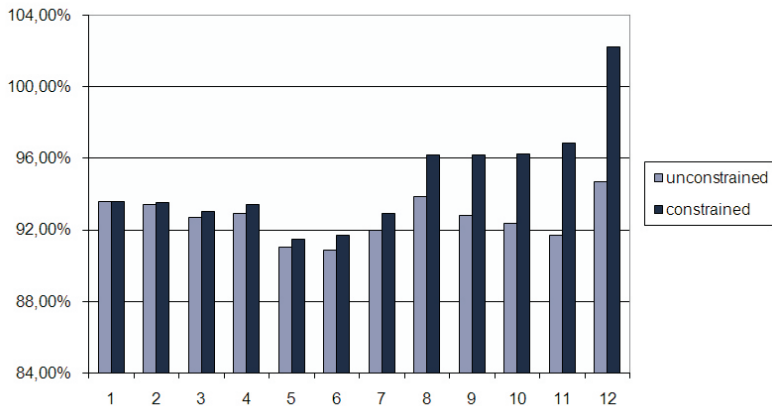
Aufgrund des sequentiellen Charakters des Chain-Ladder Modells und des globalen Charakters der Paid/Incurred Bedingung scheint das bivariate Chain-Ladder Paid/Incurred Modell der Gauss-Markov Prognose unter einer linearen Nebenbedingung nicht zugänglich zu sein.

Alternativ und singulär:

- Quarg & Mack [2004]: *Munich chain-ladder*.

Daten eines Rückversicherungsunternehmens

Paid/Incurred Endschaftenstände im Panning Paid/Incurred Modell



Paid/Incurred Modelle und Verfahren

Probleme:

- ▶ Alle (?) in der Literatur betrachteten Modelle und Verfahren für das Paid/Incurred Problem behandeln Schadenzahlungen und Schadenaufwände symmetrisch.
- ▶ Für keines dieser Verfahren wurde der Nachweis dafür erbracht, dass es im Vergleich zu den univariaten Verfahren den Unterschied zwischen den Paid und Incurred Prädiktoren der Endschaadenstände reduziert.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!