



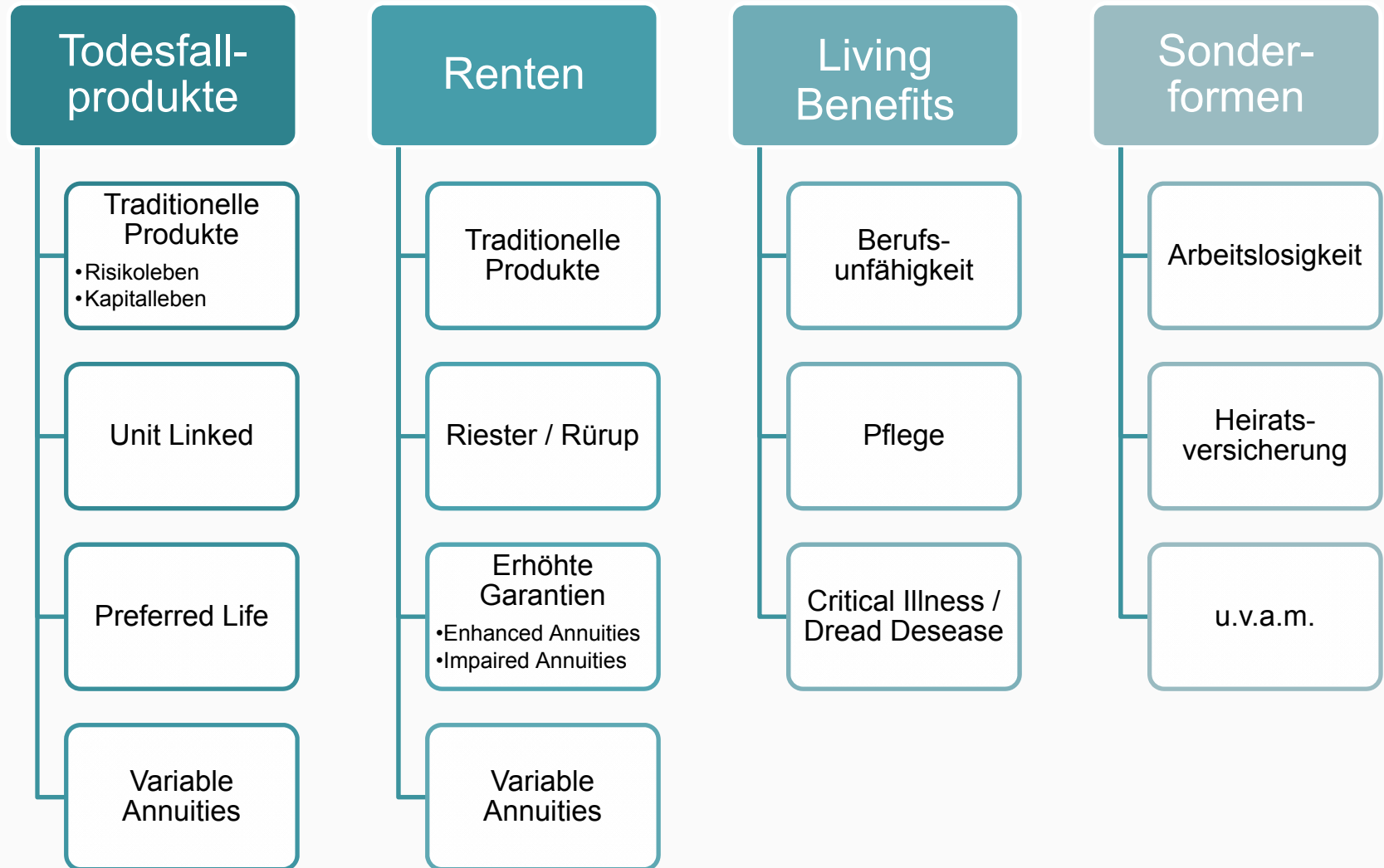
DIE ANWENDUNG VON GLM IN DER LEBENSVERSICHERUNG

Graduiertenkolleg Universität Ulm

Dr. Frank Schiller
30.10.2009

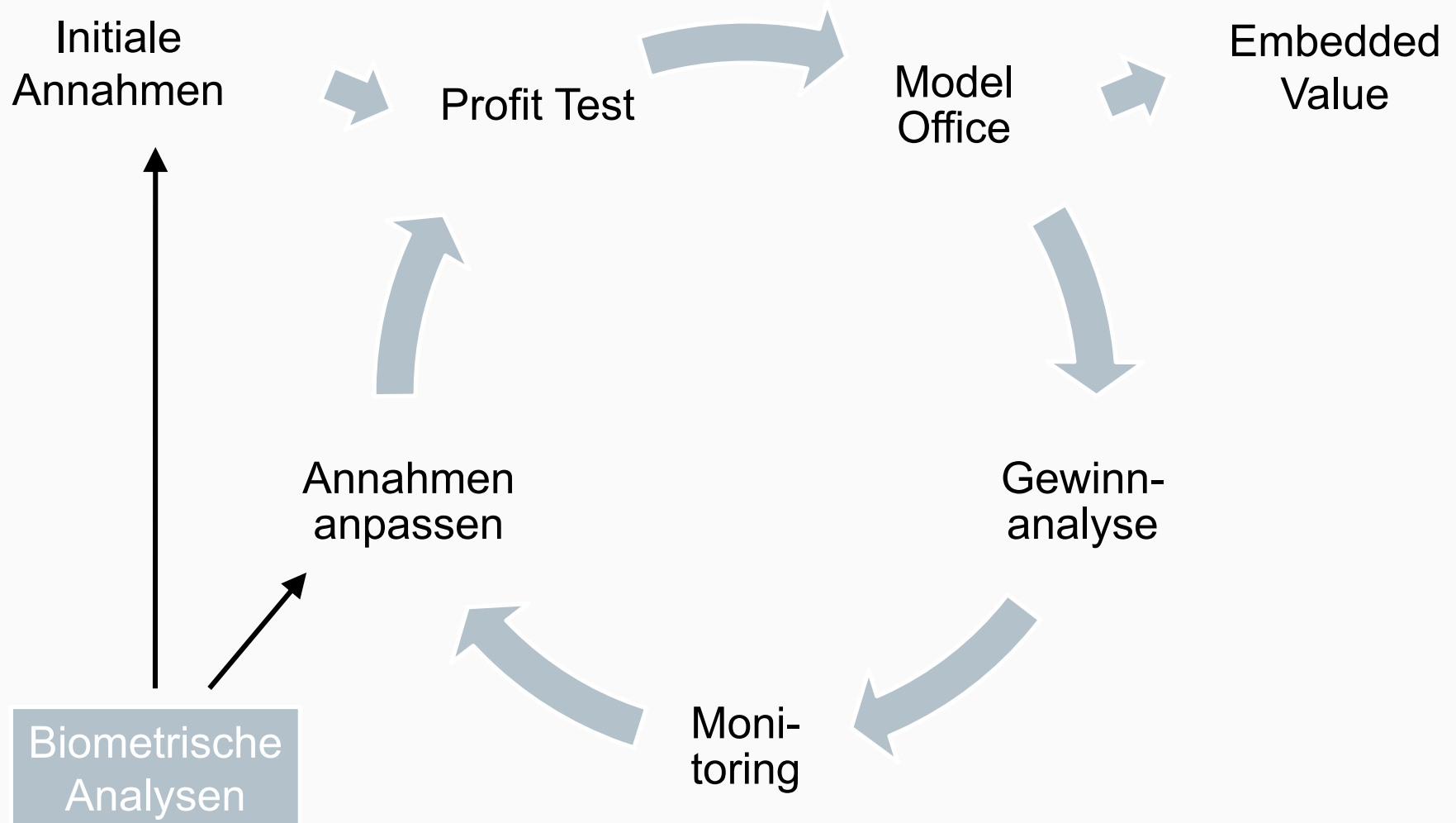
PRICING UND VALUATION IN DER LEBENSVERSICHERUNG



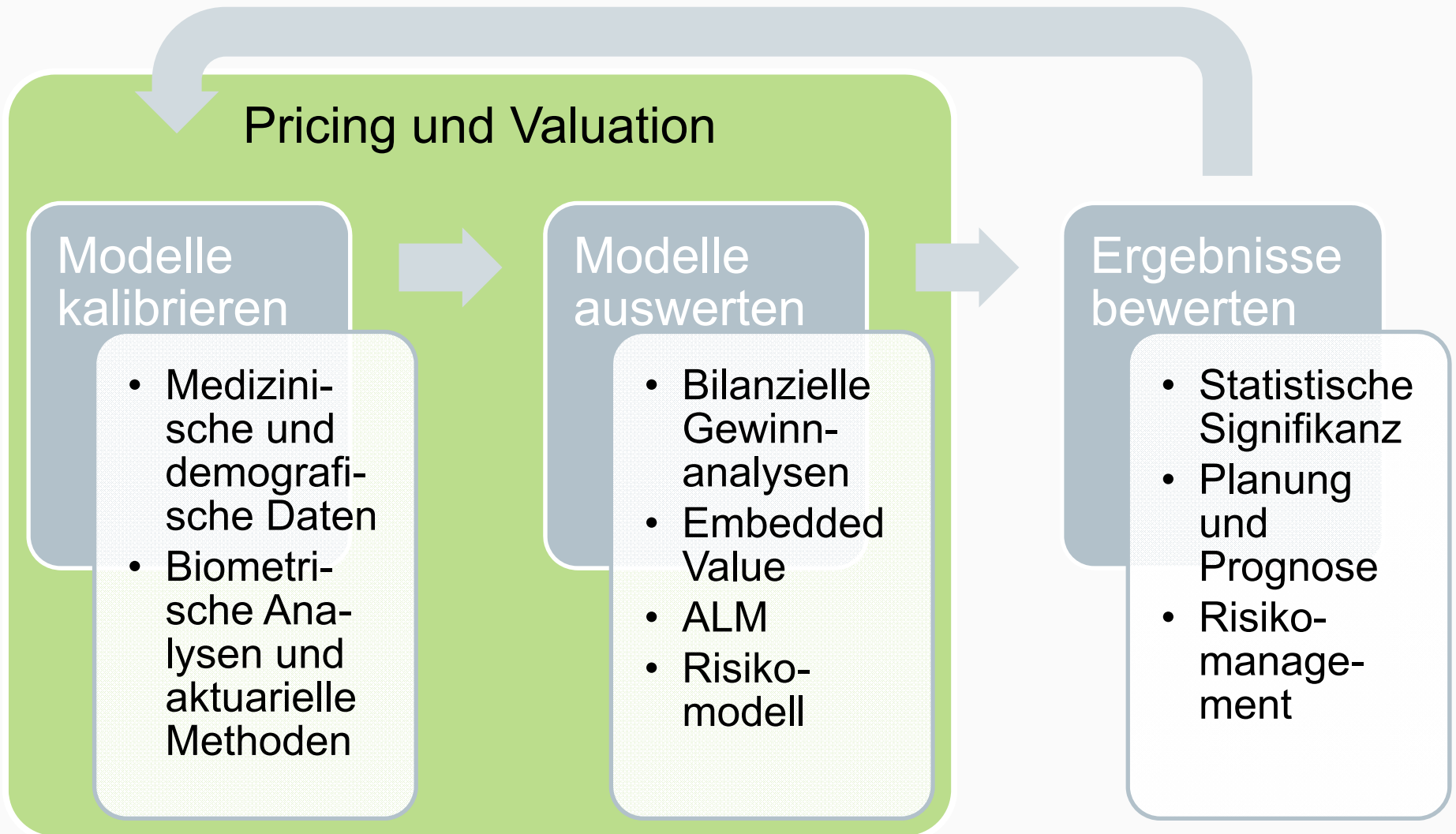


Aktuarieller Kontrollzyklus

Goford, 1985



Biometrische Analysen im Kontrollzyklus zur Unternehmensstrategie



Principle 11:

The assessment of appropriate assumptions for future experience should have regard to past, current and expected future experience and to any other relevant data.

The assumptions should be *best estimate and entity specific rather than being based on the* assumptions a market participant would use. Changes in future experience should be allowed for in the *VIF when sufficient evidence exists. The assumptions should be actively reviewed.*



**Kontrollzyklus und Biometrische Analysen
sind in MCEV Principles verankert**

Artikel 76 (2):

Die Berechnung des besten Schätzwerts hat auf der Grundlage *aktueller und glaubwürdiger Informationen* sowie *realistischer Annahmen* zu erfolgen und stützt sich auf *angemessene versicherungsmathematische Methoden* und *statistische Techniken*.

Artikel 82:

Die Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen verfügen über Prozesse und Verfahren, mit denen sicher gestellt wird, dass die besten Schätzwerte und die Annahmen, die der Berechnung der besten Schätzwerte zu Grunde liegen, regelmäßig mit Erfahrungsdaten verglichen werden.



Best Estimate und Kontrollzyklus auch in Solvency II gefordert

BIOMETRISCHE ANALYSEN: TRADITIONELLER ANSATZ



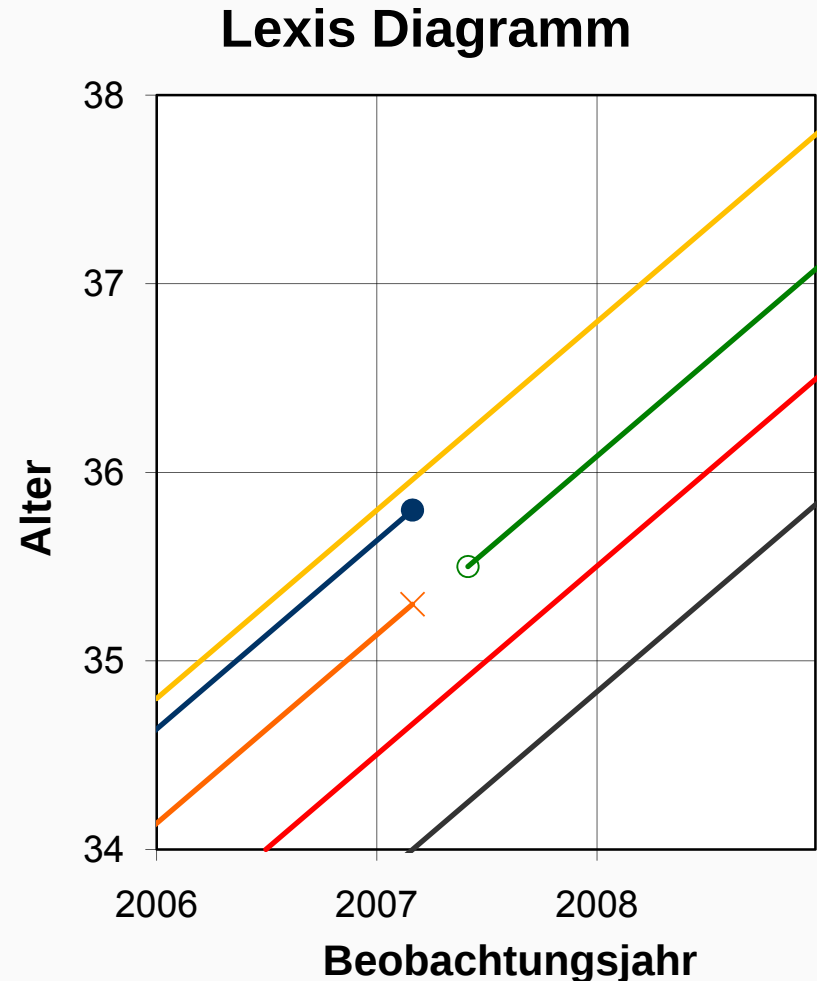
Naiver Ansatz SterbeWSK q zu schätzen

$$q = \frac{\# \text{Tote}}{\# \text{Lebende}}$$

- # Tote: einfach abzählen
- # Lebende: nicht eindeutig bestimmbar

Mögliche Ansätze die Anzahl der Lebenden / das Exposure zu bestimmen

1. Aktuarieller Ansatz (nach Gerber)
2. Initial Exposure
3. Central Exposure



Folge der Kohorte von Policen im
Startjahr (schwarze Raute)

$$q_{35} = \frac{1}{3} = 0.333$$

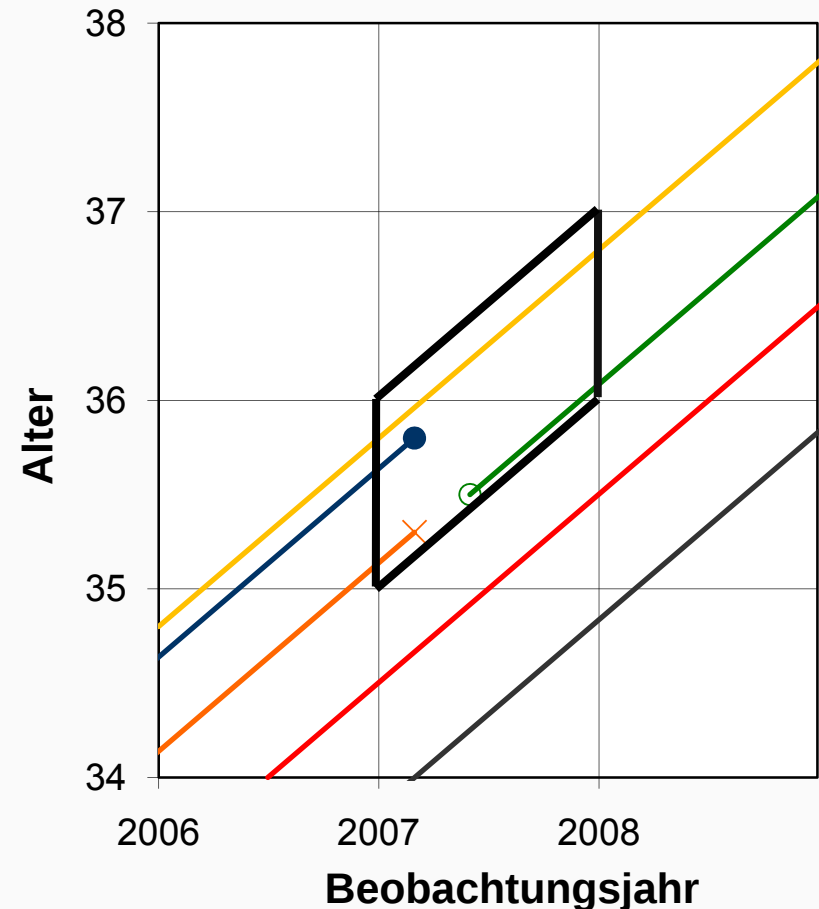
Vorteile:

- Einfach zu berechnen
- Exakte Wahrscheinlichkeit für abgeschlossene Kohorten (z.B. Rentenversicherung)

Nachteile:

- Ohne Neugeschäft
- Ohne Storno oder andere Abgänge

Lexis Diagramm



Die “force of mortality” oder Sterberate μ_x

$$\mu_x = -\ln(1 - q_x)$$

ist die bedingte Wahrscheinlichkeit im nachfolgenden infinitesimalen Zeitintervall zu sterben, gegeben, dass die Person bereits das Alter x erreicht hat.

Andere Interpretation: “Steigung des Sterblichkeitsverlaufs”

Viele Sterbegesetze basieren auf dieser Größe:

- Gompertz (1825): $\mu_x(t) = B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Makeham (1860): $\mu_x(t) = A + B \cdot e^{\beta(x+t)}$
- Perks (1932): $\mu_x(t) = \frac{A + Be^{\beta(x+t)}}{1 + Ce^{\beta(x+t)}}$

Statistik für Biometrische Analysen

Central Exposure

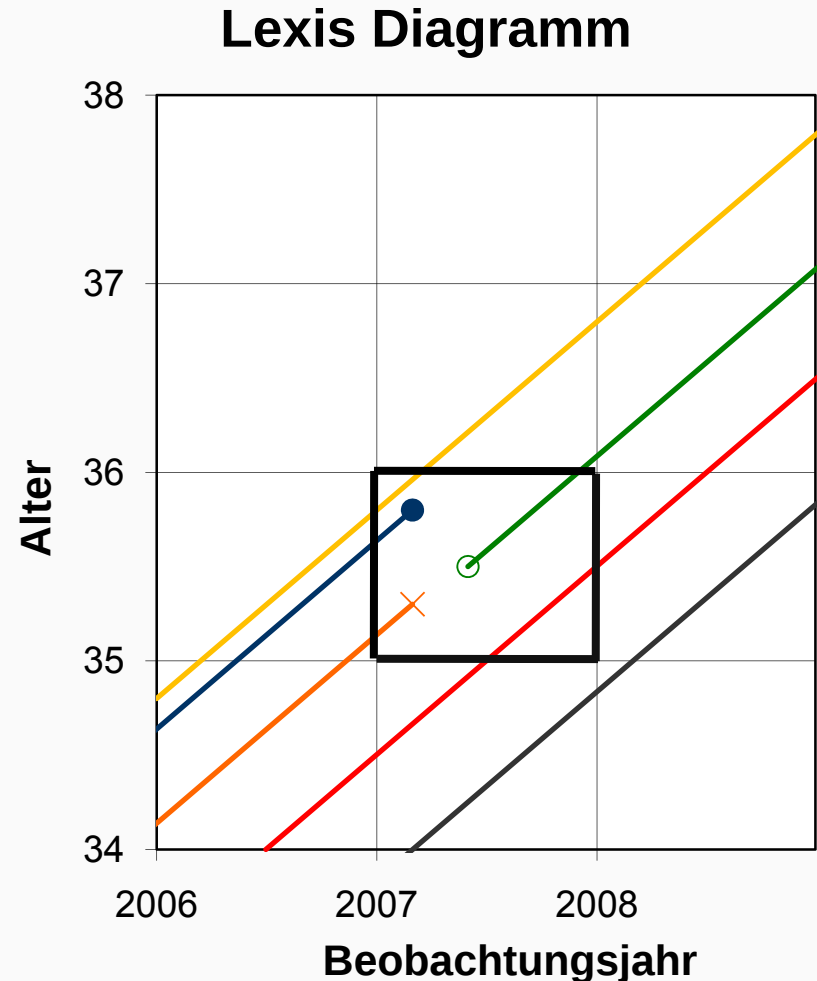
Summiere die Längen aller Linien im markierten Rechteck

gelb: 0.2 (danach 36)
blau: 0.2 (danach Storno)
orange: 0.2 (danach Tod)
grün: 0.5 (Neugeschäft)
rot: 0.5 (davor 34)

Schätze zuerst μ_x , dann daraus q_x

$$\mu_{35} = \frac{\#Tote}{\#Exposure} = \frac{1}{1.6} = 0.625$$

$$q_{35} = 1 - \exp(-\mu_{35}) = 0.465$$



Vorteile:

- Zählt Neugeschäft und Storno mit exaktem Exposure
- Gut analysiert und verstanden in akademischer Welt
- Schätzer für Sterbewahrscheinlichkeit ist im Intervall $[0,1]$
- Schätzer hat angenehme statistische Eigenschaften
- Kann als Basis für Generalisierte Lineare Modelle verwendet werden

Nachteile:

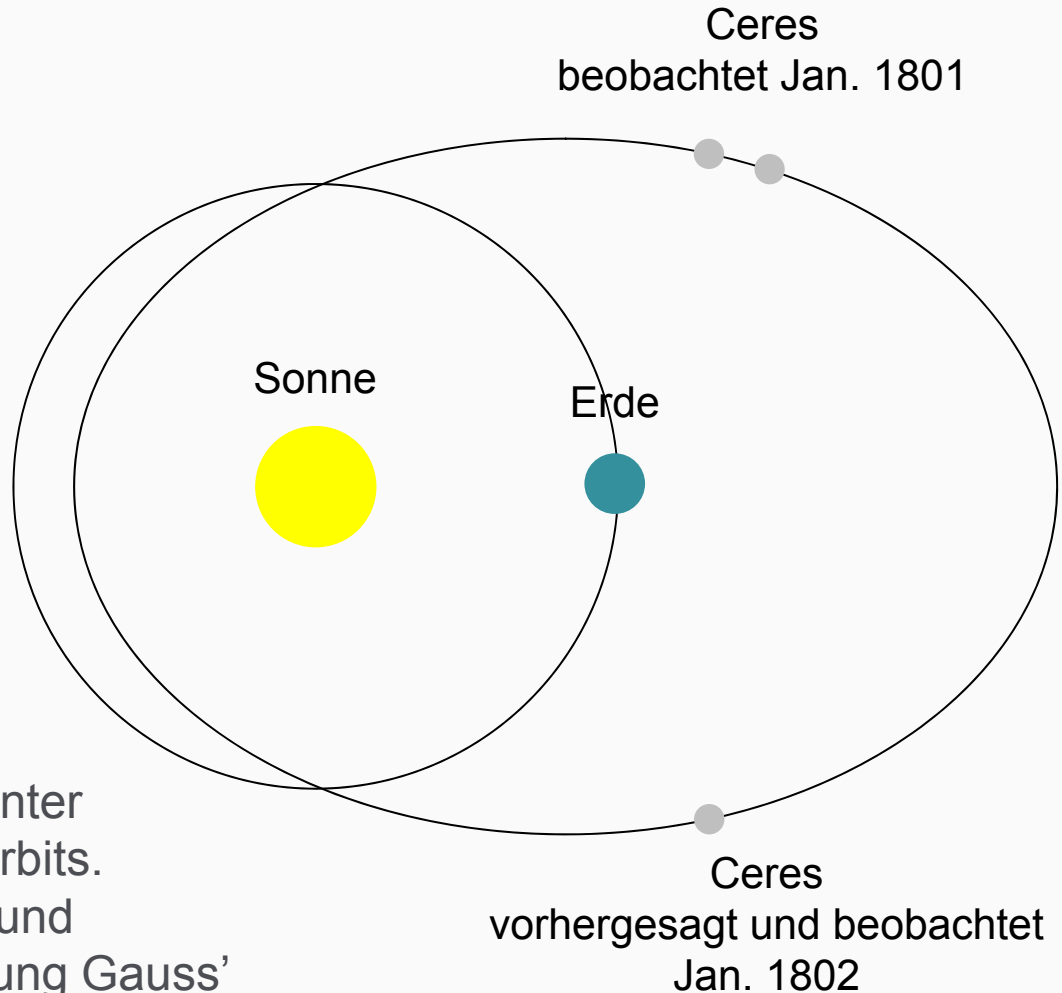
- Oft nur wenig bekanntes Verfahren

BIOMETRISCHE ANALYSEN: ANWENDUNG VON GENERALISIERTEN LINEAREN MODELLEN





C. F. Gauss 1777-1855



Gauss erfand Lineare Modelle unter anderem zur Berechnung von Orbits. GLMs wurden 1972 von Nelder und Wedderburn als Verallgemeinerung Gauss' Ansatz entwickelt.

Best Estimates für ein Portfolio Risikolebensversicherung mit Raucherstatus

Portfoliodaten einer deutschen Lebensersterversicherung:

Altersintervall:	18 - 65
Exposure:	2 Millionen Policenjahre (NR, m)
	1 Million Policenjahre (NR, f)
	0,3 Millionen Policenjahre (R, m)
	0,1 Millionen Policenjahre (R, f)
Beobachtete Zahl Toter:	Sehr kleine Anzahl für weibliche Raucher



**Traditionelle Methoden können für die Herleitung von
Best Estimates nicht angewendet werden**

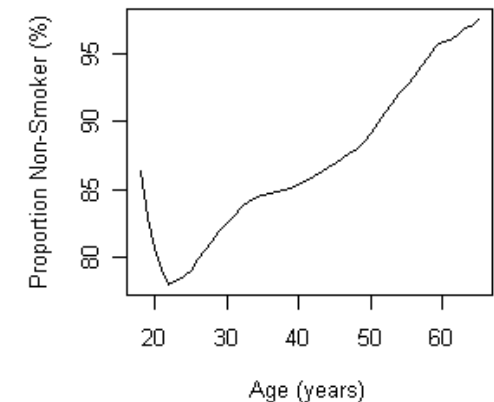
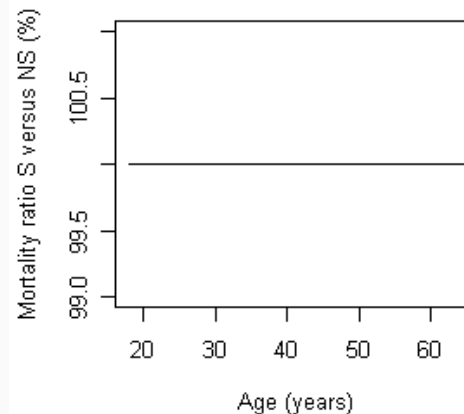
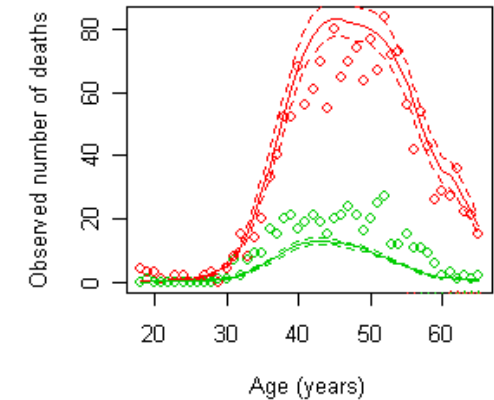
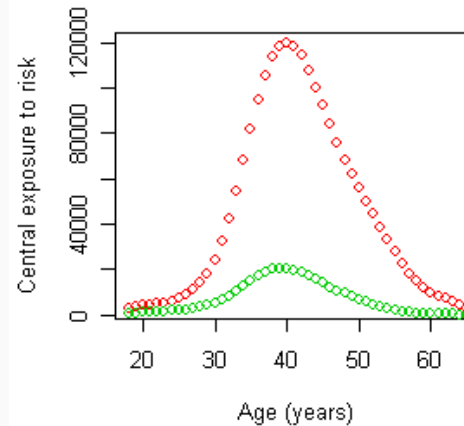
Best Estimates für ein Portfolio Anpassung für Männer

Problem:

- Kleine Anzahl an Toter erlaubt nicht die Verwendung traditioneller Ansätze.

Erster Schritt:

- Anpassung durch GLMs ohne Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus
- Fit nicht zufriedenstellend

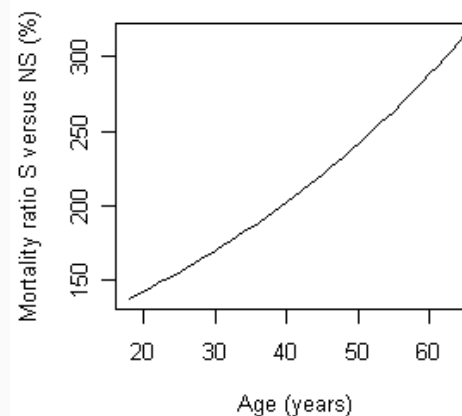
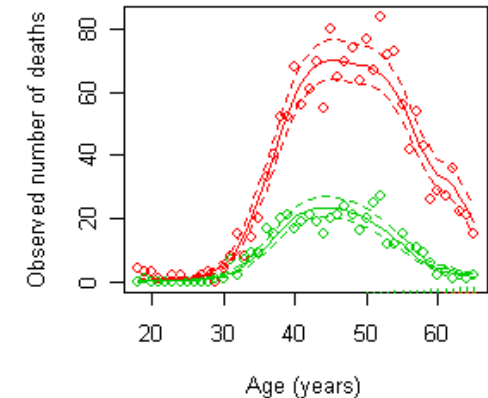
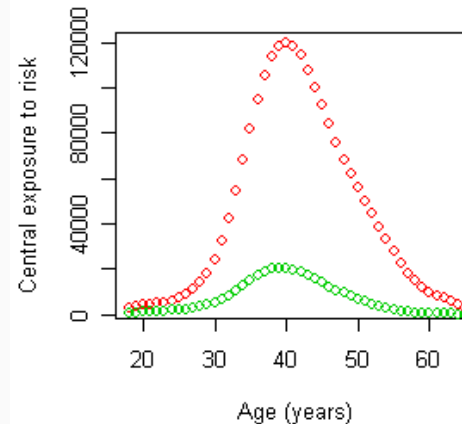


Best Estimates für ein Portfolio

Anpassung für Männer nach Raucherstatus

Zweiter Schritt:

- Anpassung durch GLMs mit Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus.
- Dabei quadratische Abhängigkeit nach Alter angesetzt.
- Fit angemessen



Best Estimates für ein Portfolio

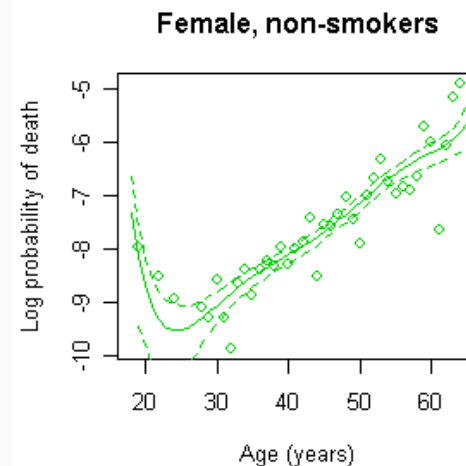
Gleichzeitige Anpassung für Männer und Frauen

Dritter Schritt:

- Anpassung mit Abhängigkeit zwischen Alter und Raucherstatus

und

- verwende gleiche Grundform für beide Geschlechter
- Angemessene Anpassung auch für kleine Anzahl Toter bei Frauen möglich



Generalisierte Lineare Modelle

Die Theorie

GLMs sind durch drei Komponenten bestimmt.

- **zufällige Komponente:**

Response Y_i unabhängig mit Verteilung aus der exponentiellen Familie mit Erwartungswert μ_i

- **systematische Komponente:**

linearer Prädiktor: $\eta_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik}$

mit $\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, \dots, x_{ik})^T$

- **Linkfunktion:** $g(\mu_i) = \eta_i$

verbindet den linearen Prädiktor η_i mit dem Erwartungswert μ_i

Generalisierte Lineare Modelle für die Lebensversicherung

Die drei Komponenten der GLMs in der Lebensversicherung.

- **zufällige Komponente:**

Response Y_i modelliert Anzahl der Toten
„Poisson-Modell“ für Central Exposure Ansatz

- **systematische Komponente:**

linearer Prädiktor: $\eta_i = x_i^T \beta$

- **Linkfunktion:** $\log(\mu_i) = \eta_i$

$\mu_i = \text{Exposure}_i \cdot \exp(\eta_i) = \exp(\log(\text{Exposure}_i) + x_i^T \beta)$

mit „Offset“ $\log(\text{Exposure}_i)$

Best Estimates für ein Portfolio

Modellierung durch GLM

$$\mu = \text{Exposure} \cdot \exp(\beta_0 f(\text{Alter}) + (\beta_1 + \beta_2 \text{Alter} + \beta_3 \text{Alter}^2) \text{Raucher} + \beta_4 \text{Geschlecht})$$

mit

μ	erwartete Anzahl der Toten
β_i	lineare Faktoren zur Anpassung des GLM
Alter	in Jahren
f	Polynom oder an Portfolio angepasste Funktion (z.B. lokaler Ausgleich, Whittaker-Henderson)
Raucher	0 bei Nichtraucher, 1 bei Raucher
Geschlecht	0 bei Männern, 1 bei Frauen

RISIKOMODELL MIT GENERALISIERTEN LINEAREN MODELLEN KALIBRIEREN



BRiSMA (**B**iometric **R**isk – **S**tochastic **M**odeling **A**pproach)

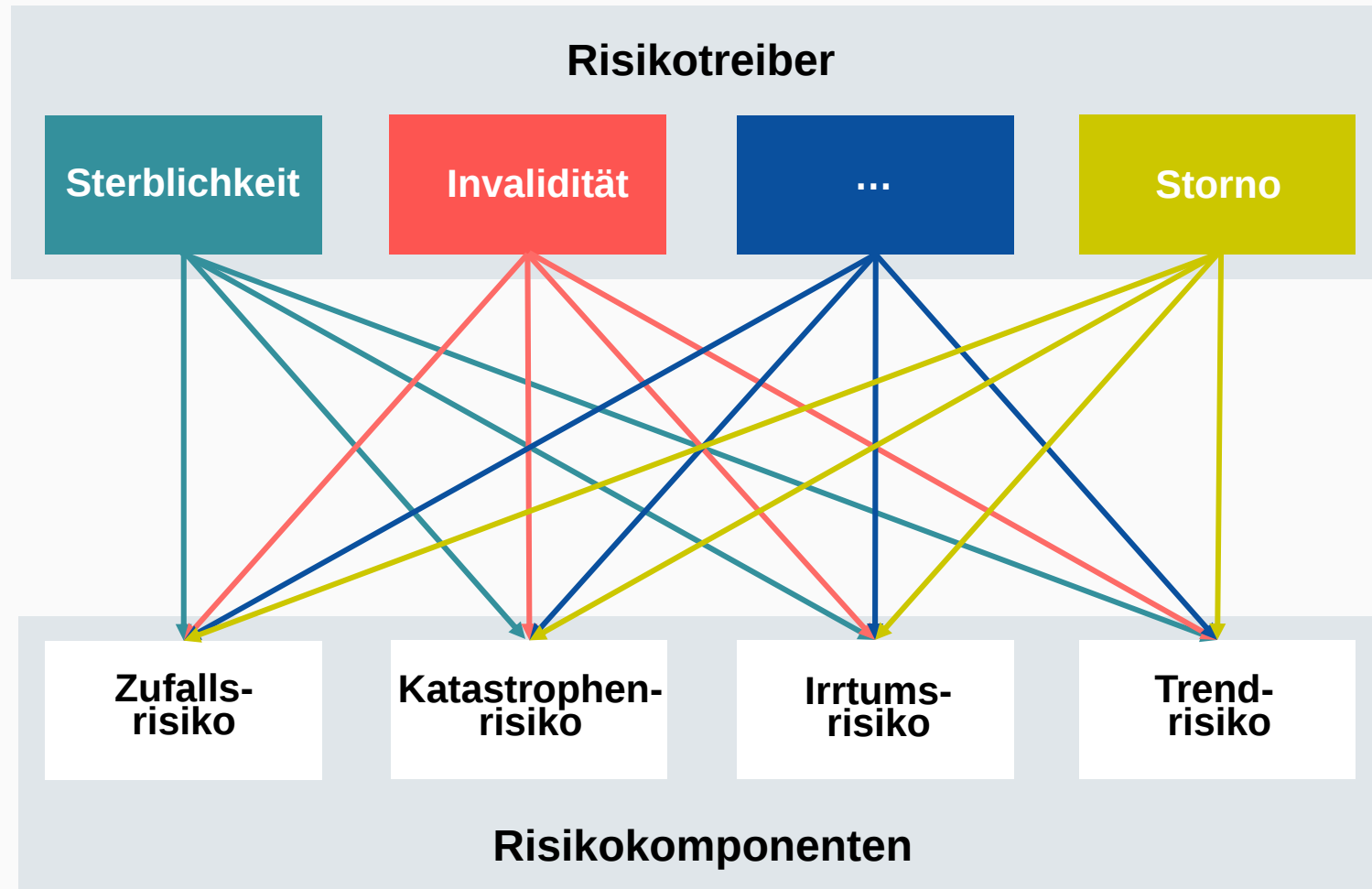
– grundlegende Idee einer stochastischen Modellierung

Für jeden Risikotreiber werden Simulationen durch die folgende Vorschrift generiert:

Simulierter Wert = Best Estimate Wert · Faktor für Schwankung

Die Zufallsvariablen der Faktoren für die Schwankung sind auf den Erwartungswert 1 normiert, um die Simulation auf den Best Estimate zu zentrieren.

Wesentliche Risikotreiber und -komponenten



Risikokomponenten im Detail

Risiko- komponenten

Zufalls- risiko

Jährliche, zufällige Fluktuationen
Kalibriert auf die Schwankung der Gesamtschadenverteilung
des Portfolios

Katastrophen- risiko

Z.B. Pandemien, Naturgefahren
Kalibriert auf historische Großschäden und Experteneinschätzung

Irrtums- risiko

Fehleinschätzung des Best Estimate durch schlechte
Datenqualität, Basisrisiko etc.
Kalibriert mit biometrischen Analysen und Markteinschätzung

Trend- risiko

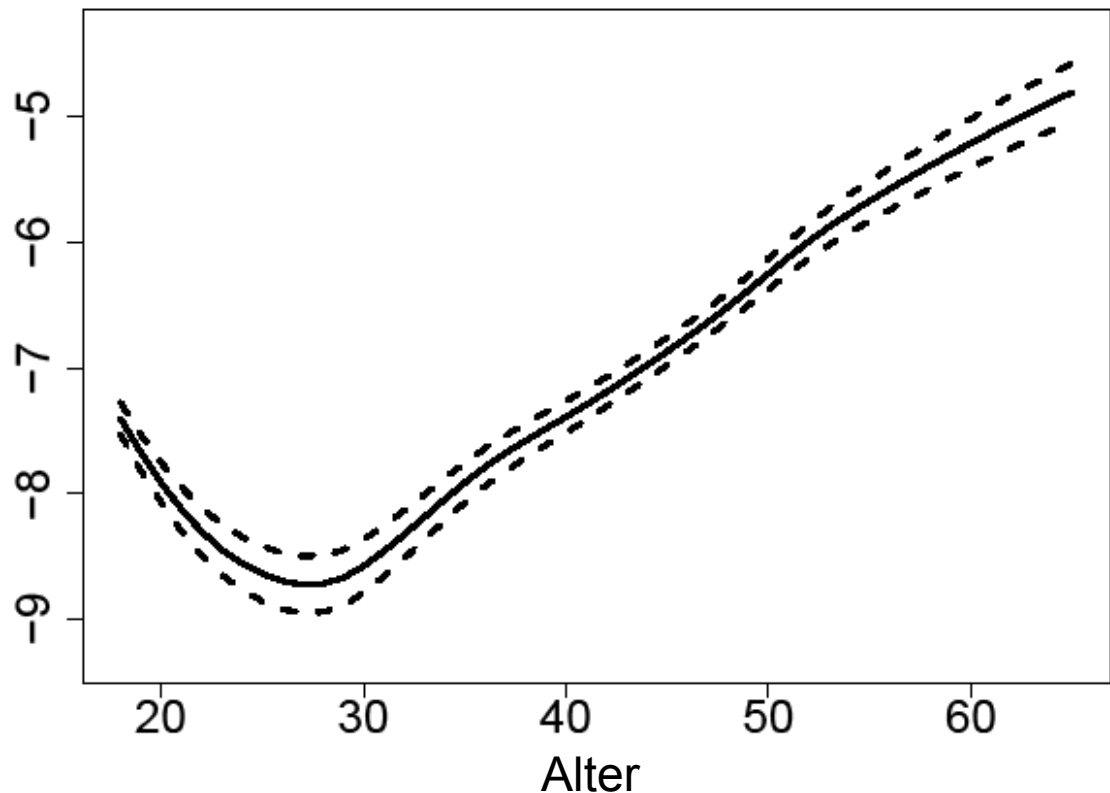
Langzeitentwicklung eines ansonsten korrekt geschätzten Best Estimate
Kalibriert auf historischen Trendentwicklungen

**Anwendung von GLMs für Kalibrierung von Irrtums- und
Trendrisiko**

Kalibrierung des Levelrisikos

Logarithmus des Best Estimate mit 95% Konfidenzintervall:

1. Bestimme Konfidenzintervall mit GLM
2. Wende Poisson Modell für die Simulation des Levelrisikos an.
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen
4. Modelliere ggf. Basisrisiko entsprechend



Asymptotisches Ergebnis für die Schätzer β :

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}}) \quad \text{mit} \quad \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i x_i' \hat{\mu}_i \right)^{-1}$$

- $x_i' \hat{\beta}$ asymptotisch Normalverteilt mit Varianz:

$$\widehat{Var}(x_i' \hat{\beta}) = x_i' \hat{\Sigma}_{\hat{\beta}} x_i$$

- Symmetrisches $(1-\alpha)\%$ Konfidenzintervall für $x_i' \beta$:

$$x_i' \hat{\beta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{Var}(x_i' \hat{\beta})}$$

mit $z_{\alpha/2}$ dem $\alpha/2$ - Quantil der Standardnormalverteilung,

$z_{\alpha/2} = 1,96$ für $\alpha = 5\%$

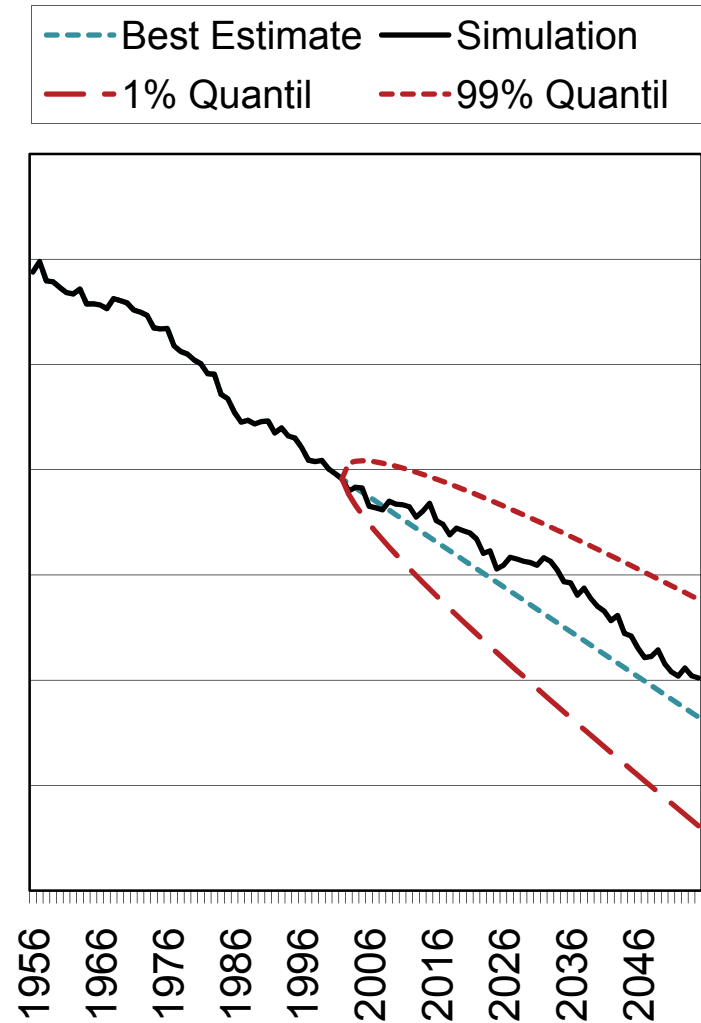
Kalibrierung des Trendrisikos

Verwende Standardmodelle für die Kalibrierung des Trends (häufig GLMs):

- Lee-Carter oder Haberman-Renshaw
- Cairns-Blake-Dowd

oder vergleichbare Ansätze...

1. Kalibriere das Modell
2. Erzeuge Pfade zukünftiger Trendentwicklung durch Zeitreihen
3. Verwende Management Regeln für mgl. Modellanpassungen



Kalibrierung des Trendrisikos nach Cairns, Blake, Dowd (2005)

SterbeGesetz: Vereinfachtes, diskretisiertes Perks Modell

$${}_1p_x(t) = \frac{1}{e^{A_1(t+1)+A_2(t+1) \cdot (x+t)} + 1}$$

Modellierung der Zeitabhängigkeit der Parameter $A(t) = (A_1(t), A_2(t))'$ durch diskretisierte, korrelierte zweidimensionale Brownsche Bewegung mit Drift

$$A(t+1) = A(t) + \theta + C \cdot B(t)$$

θ zeitinvariante Drift

C zeitinvariante Korrelationsmatrix

$B(t)$ zweidimensionale Standard Brownsche Bewegung

Kalibrierung und Prognose zweistufig:

1. SterbeGesetz an Daten anpassen
2. An Zeitreihe der Parameter Modell anpassen und damit Prognose ableiten

Kalibrierung des Trendrisikos nach Cairns, Blake, Dowd (2005)

1. Schritt (Sterbegesetz an Historie anpassen):

Innerhalb einer Generation t ist die von vorgeschlagene Transformierte von ${}_1p_x(t)$

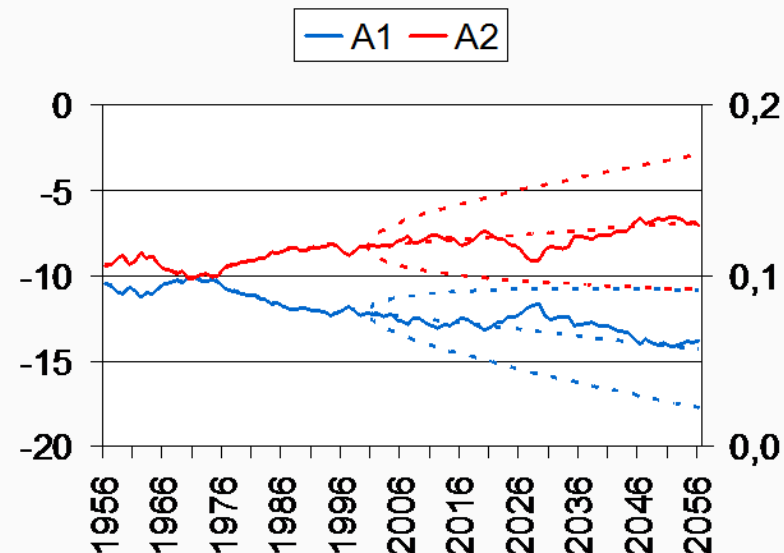
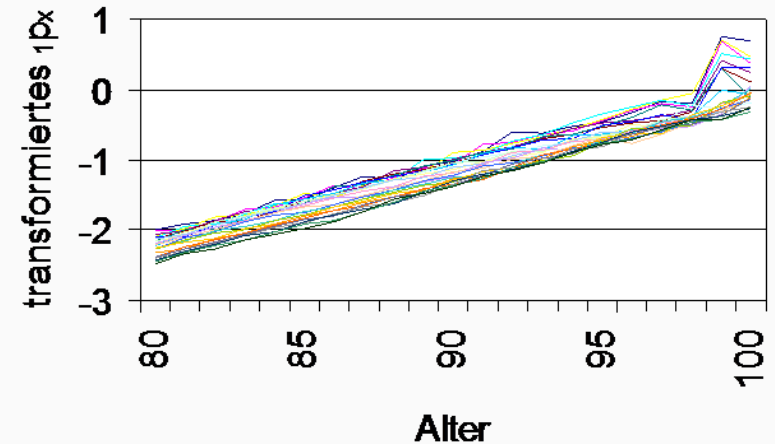
$$\ln(1/{}_1p_x(t) - 1)$$

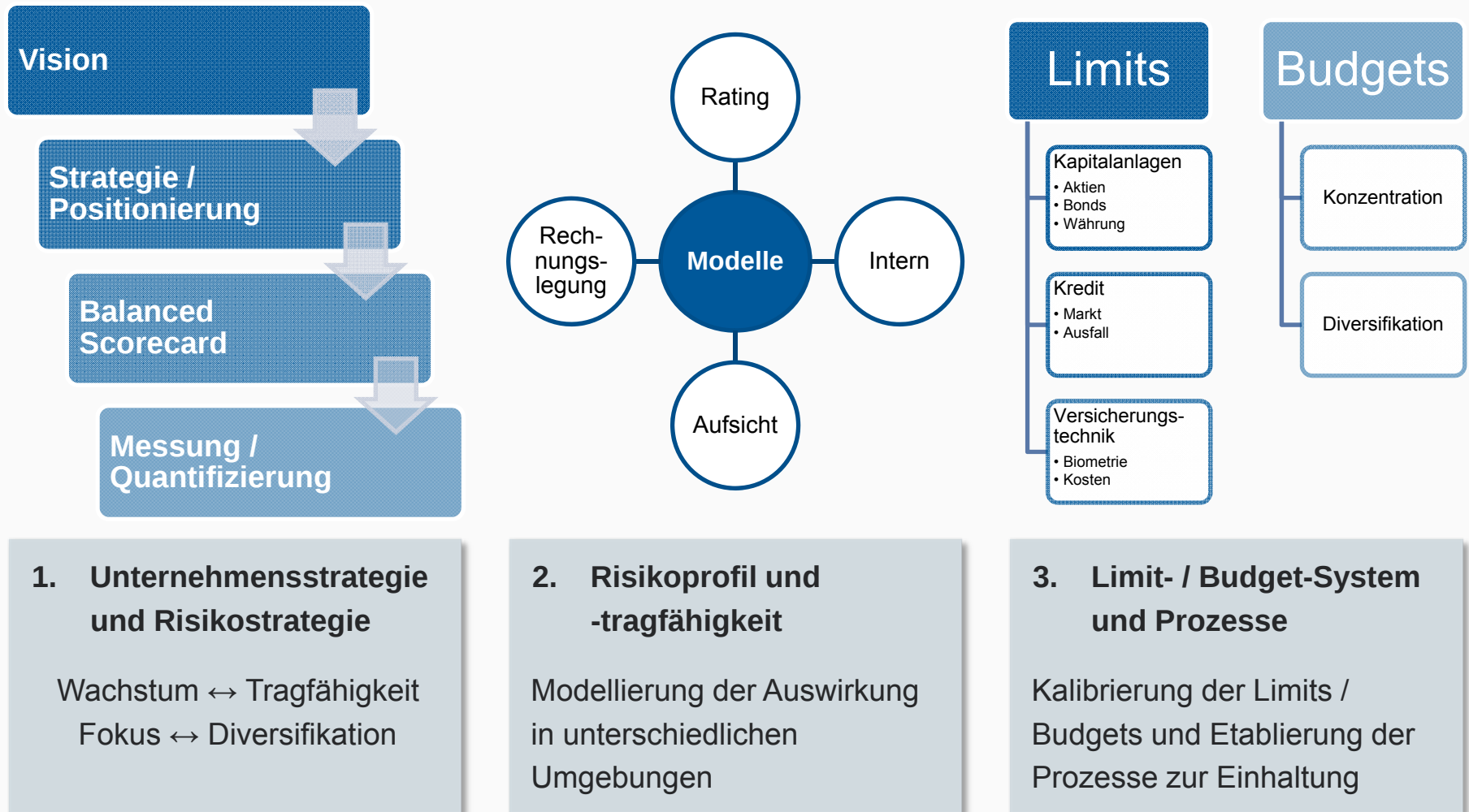
annähernd linear.

2. Schritt (Diffusion an Parameter A_1 und A_2 anpassen):

Mit Least-Square- oder Maximum-Likelihood-Methode ergibt sich

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} -0,038 \\ 0,0026 \end{pmatrix} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0,1986 & -0,0022 \\ -0,0022 & 0,00048 \end{pmatrix}$$





MODELLIERUNG MIT GLMS



-
- Modellierung verschiedener Datentypen:
Kategoriale und stetige Variablen
 - Modellierung von Abhängigkeiten
 - Signifikanz von Kovariablen und Interaktionen
 - Vergleich von Modellen
 - Überprüfung der Modellgüte

Beispiel: Produkttyp (KLV, RLV oder FLV)

Definition von Indikatorvariablen x_1 und x_2 :

Modell: $\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2})$

Beob. i KLV: $\mu_i = \exp(\beta_0)$

Beob. i RLV: $\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1) \rightarrow \exp(\beta_1)$: Risiko RLV / KLV

Beob. i FLV: $\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_2) \rightarrow \exp(\beta_2)$: Risiko FLV / KLV

$\exp(\beta_2 - \beta_1)$: Risiko FLV / RLV

Produkttyp	x_1	x_2
KLV	0	0
RLV	1	0
FLV	0	1

Beispiel: x_i = Alter von Beobachtung i

Modellierung als Polynom:

$$\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_p x_i^p)$$

Nichtparametrische Modellierung:

$$\mu_i = \exp(f(x_i))$$

wobei $f(x)$ eine glatte, nicht näher spezifizierte Funktion ist die mit Splines oder lokalen Glättungsmethoden geschätzt wird

Generalized Additive Models (GAM) bieten dafür konsistente Statistik

Modelle mit zwei Kovariablen x_1 und x_2

Gibt es Abhängigkeiten zwischen den Kovariablen?

► Modell mit Interaktion:

$$\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 \mathbf{x}_{i1} \mathbf{x}_{i2})$$

Beispiel:

x_{i1} = Alter von Beobachtung i , $x_{i2} = \begin{cases} 0, & \text{wenn Beob. } i \text{ Nichtraucher} \\ 1, & \text{wenn Beob. } i \text{ Raucher} \end{cases}$

→ Effekt für Raucher: $\exp(\beta_2 + \beta_3 x_{i1})$ altersabhängig!

Modell: $\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2})$

Ist die Kovariable x_1 signifikant, d.h. ist β_1 von 0 verschieden?

z-Test:

Nullhypothese $H_0: \beta_1 = 0$

Teststatistik: $z = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}}$ approximativ Normalverteilt unter H_0

→ Verwerfe H_0 wenn z größer als das α -Quantil der Standardnormalverteilung

////////////////////////////////////

Null-Modell: $\mu_i = E_i \lambda = E_i \exp(\beta)$

Für alle Beobachtungen wird dieselbe Rate λ angenommen.

→ einfachstes Modell

Volles Modell: $\mu_i = y_i$

Die geschätzten Werte entsprechen den beobachteten Werten.

→ perfekte Anpassung

Ziel:

Möglichst gute Anpassung an die Daten, aber kein „Überfit“ an zufälligen Abweichungen

► Das **beste Modell** liegt irgendwo dazwischen.

Modellvergleich – Beispiel AIC

Kriterium zum Vergleich von Modellen:

AIC (Akaike's Information Criterion):

$$\text{AIC} = -2 \log \text{Likelihood} + 2 \cdot \# \text{ Parameter}$$

Trade – Off zwischen Modellkomplexität und Modellanpassung.

Je kleiner das AIC, desto besser das Modell.

Grobe Daumenregel: $\text{AIC}(\text{Modell 1}) - \text{AIC}(\text{Modell 2}) \geq 10$

→ Modell 2 signifikant besser als Modell 1

Andere Verfahren:

- Log Likelihood Ratio Test
- Vergleich der Deviance mit Freiheitsgrade
- Grafisch: Residuen sollten keine Struktur mehr enthalten



VIELEN DANK FÜR IHRE
AUFMERKSAMKEIT!

Dr. Frank Schiller

////////////////////////////////////
Byrne, F., Farr, I. (2007), *Risk Management in Strategic Decision Making*, Emphasis Magazine 2007 No. 3

Cairns A. J.G., Blake D., Dowd K. (2005), Pricing Death: Framework for the valuation and securitization of mortality risk, *AFIR Colloquium 2004*

CFO Forum (2008), *Market Consistent Embedded Value Principles*.
http://www.cfoforum.nl/pdf/mcev_principles_and_guidance.pdf

Forfar, D. et al (1988), *On Graduation by Mathematical Formula*. Journal of Institute of Actuaries Students' Society, 115, 1-119.

Gerber, H. (1997), *Life Insurance mathematics*. Springer, 3rd edition

Goford, J. (1985), *The Control Cycle: Financial Control of a Life Assurance Company*. Journal of Institute of Actuaries Students' Society, 28, 94-114.

Haberman, S., Renshaw A. (1996), *Generalized Linear Models and Actuarial Science*. The Statistician, 45 No. 4, 407-437

Kommission der europäischen Gemeinschaften (2008), *Solvabilität II*, KOM(2008) 119, 2007/0143 (COD)