



Nested Simulations - Innovative Methoden für rechenintensive Probleme in der Lebensversicherung

- 1 Einführung
- 2 Nested Simulations bei der Bewertung von Optionen
 - Einfacher Monte Carlo Ansatz
 - PDE Ansatz
 - Least-Squares Monte Carlo Ansatz
- 3 Nested Simulations und Solvency II
 - Ansatz über Nested Simulations
 - Least-Squares Monte Carlo Ansatz
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

1 Einführung

2 Nested Simulations bei der Bewertung von Optionen

Einfacher Monte Carlo Ansatz

PDE Ansatz

Least-Squares Monte Carlo Ansatz

3 Nested Simulations und Solvency II

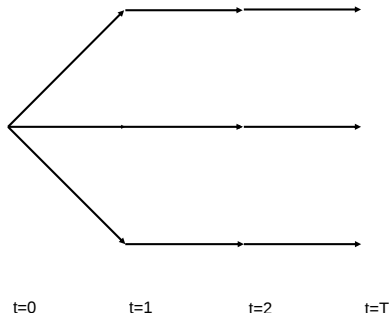
Ansatz über Nested Simulations

Least-Squares Monte Carlo Ansatz

4 Zusammenfassung und Ausblick

Was sind Nested Simulations?

- ▶ Einfache Monte Carlo Simulationen:

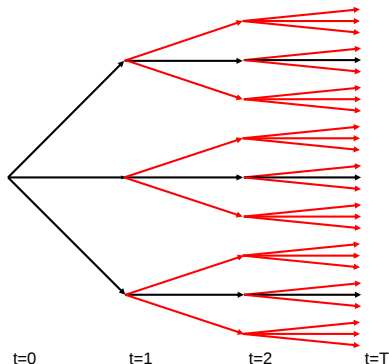


- ▶ Vorgehen:

- ▶ Simulation von N Pfaden für den Zeitraum $[0, T]$
- ▶ Bestimmung der Cashflows und Diskontierung
- ▶ Schätzung des Werts durch Mittelwertbildung

Was sind Nested Simulations?

- **Geschachtelte** Monte Carlo Simulationen:



- In jedem der N Knoten wird wieder eine gewisse Anzahl K von Pfaden benötigt
- **Problem:** Sehr hoher Rechenaufwand (insbesondere bei langen Vertragslaufzeiten)

Wo treten Nested Simulations in der Lebensversicherung auf?

- ▶ **Marktkonsistente Bewertung von Optionen** in Lebensversicherungsverträgen
 - ▶ Berechnung des **Solvency Capital Requirements (SCR)** im Rahmen von Solvency II
 - ▶ ...
-
- ▶ **Fragen:**
 - ▶ Wie kann man Nested Simulations sinnvoll umsetzen?
 - ▶ Welche alternativen Ansätze gibt es?

1 Einführung

2 Nested Simulations bei der Bewertung von Optionen

Einfacher Monte Carlo Ansatz

PDE Ansatz

Least-Squares Monte Carlo Ansatz

3 Nested Simulations und Solvency II

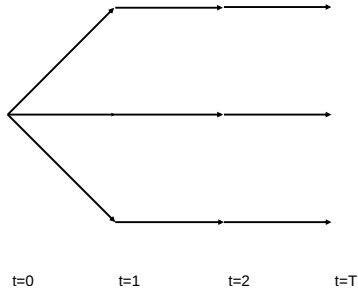
Ansatz über Nested Simulations

Least-Squares Monte Carlo Ansatz

4 Zusammenfassung und Ausblick

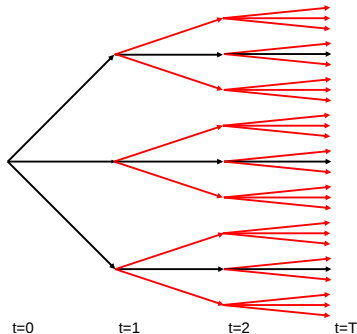
Einfacher Monte Carlo Ansatz

- ▶ Monte Carlo Simulationen sind sinnvoll, wenn die Verträge keine „Early-exercise Features“ enthalten (z.B. Kündigungsoption)



Einfacher Monte Carlo Ansatz

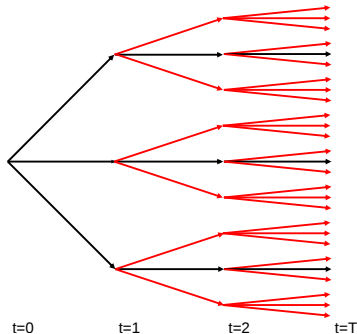
- ▶ Monte Carlo Simulationen sind sinnvoll, wenn die Verträge keine „Early-exercise Features“ enthalten (z.B. Kündigungsoption)



- ▶ Bewertung von Verträgen mit „Early-exercise Features“ $\Rightarrow$ „Nested Simulations“

Einfacher Monte Carlo Ansatz

- ▶ Monte Carlo Simulationen sind sinnvoll, wenn die Verträge keine „Early-exercise Features“ enthalten (z.B. Kündigungsoption)



- ▶ Bewertung von Verträgen mit „Early-exercise Features“ $\Rightarrow$ „Nested Simulations“
- ▶ Bias aufgrund der endlichen Anzahl von Simulationen in jedem Knoten

Beispielvertrag

- ▶ Termfix-Vertrag mit Mindestverzinsung und Kündigungsoption
- ▶ kein biometrisches Risiko
- ▶ Kapitalmarktmodelle:
 - ▶ Klassisches Black-Scholes-Modell
 - ▶ Erweitertes Black-Scholes-Model mit stochastischen Zinsen
- ▶ Zwei verschiedene Gewinnbeteiligungssysteme:
 - ▶ *MUSS-Fall*: modelliert nur die gesetzlich vorgeschriebene Beteiligung der Versicherungsnehmer
 - ▶ *IST-Fall*: modelliert das typische Verhalten deutscher Lebensversicherer in den letzten Jahren

Ergebnisse für Nested Simulations

Pfade pro Knoten	$\hat{V}_0$	$\hat{v}_0$	Zeit
1	10.523,4	10.055,0	< 1 s
2	10.411,0	10.051,6	15 s
3	10.395,6	10.100,3	11 min 37 s
4	10.388,8	10.169,8	2 h 47 min
5	10.380,2	10.228,6	≈ 1 Tag
6	10.378,6	10.270,3	≈ 6 Tage
7	10.375,6	10.293,8	≈ 30 Tage

Tabelle: „Nested Simulations“, MUSS-Fall, BS-Modell, 5000 Bäume¹

Probleme:

- ▶ Schon bei geringer Anzahl von Pfaden pro Knoten immense Rechenzeiten
- ▶ Schätzer haben einen **Bias**!

⇒ Suche nach alternativen Ansätzen ist sinnvoll!

¹Die Berechnungen wurden auf einem Linux-Rechner mit Pentium IV 2.40 Ghz CPU und 2.0 GB RAM durchgeführt.

PDE Ansatz

- Idee: Löse das entsprechende Kontrollproblem auf einem diskretisierten Raum
 - Wertfunktion $V(T, y, d)$ ist bei Vertragsende für alle Zustände (y, d) bekannt
 - Herleitung einer P(l)DE-Darstellung für die Wertfunktion $V(t, y, d)$ auf $[T - 1, T)$ (Feynman-Kac)
 - Beispiel: Klassisches Black-Scholes-Modell

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial Y} rY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 Y} \sigma^2 Y^2 - rV.$$

- Analog für andere Stichtage

$$0 \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad \dots \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad T-2 \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad T-1 \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad T$$

- An den Stichtagen fließen Optionen durch Endbedingung ein, z.B. bei Kündigungsoption

$$V(t-1, Y_{t-1}, D_{t-1}) := \max\{V(t-1, Y_{t-1}, D_{t-1}), D_{t-1}^{(1)}\}.$$

PDE Ansatz

- ▶ Idee: Löse das entsprechende Kontrollproblem auf einem diskretisierten Raum
 - ▶ Wertfunktion $V(T, y, d)$ ist bei Vertragsende für alle Zustände (y, d) bekannt
 - ▶ Herleitung einer P(l)DE-Darstellung für die Wertfunktion $V(t, y, d)$ auf $[T - 1, T)$ (Feynman-Kac)
 - ▶ Beispiel: Klassisches Black-Scholes-Modell

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial Y} rY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 Y} \sigma^2 Y^2 - rV.$$

- ▶ Analog für andere Stichtage

$$0 \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad \dots \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad T-2 \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad T-1 \quad \xleftarrow{P(l)DE} \quad T$$

- ▶ An den Stichtagen fließen Optionen durch Endbedingung ein, z.B. bei Kündigungsoption

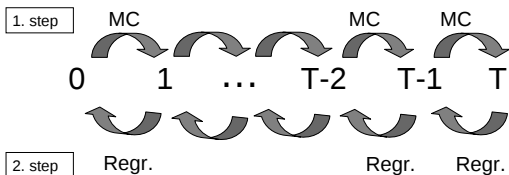
$$V(t-1, Y_{t-1}, D_{t-1}) := \max\{V(t-1, Y_{t-1}, D_{t-1}), D_{t-1}^{(1)}\}.$$

Problem:

- ▶ Effizienz hängt stark von der Gestalt der P(l)DE ab $\Rightarrow$ Algorithmus kann sehr rechen- und zeitintensiv sein

Least-Squares Monte Carlo Ansatz (1)

- ▶ Ansatz wurde zuerst von Longstaff/Schwartz (2001) für die Bewertung von Amerikanischen Optionen vorgestellt
- ▶ Kombiniert die Vorteile der beiden vorhergehenden Ansätze
 - ▶ Rückwärts iteratives Vorgehen zur Berücksichtigung des Versicherungsnehmerverhaltens
 - ▶ Einfache Monte Carlo Simulationen für einperiodige Probleme



- ▶ Struktur der Wertfunktion $V(t, y, d)$ muss vorher spezifiziert werden (z.B. Polynom in den Zustandsvariablen)
- ▶ Parameter der Wertfunktion werden durch Regression geschätzt

Least-Squares Monte Carlo Ansatz (2)

- ▶ Beispiel: Bewertung eines Vertrags mit Kündigungsoption
 1. Monte Carlo Simulationen
 2. Berechnung der Cashflows $C(T)$ zum Laufzeitende unter der Annahme, dass die Kündigungsoption zu keinem Zeitpunkt ausgeübt wurde
 3. Diskontierung der Cashflows um eine Periode und Bestimmung des „Fortführungswerts“ durch Regression
 4. Entscheidung, ob der VN den Vertrag zu $t = T - 1$ kündigt
 5. Bestimmung der „neuen“ zukünftigen Cashflows, d.h.

Entscheidung	Cashflow zu	
	$T - 1$	T
Kündigung	Rückkaufswert	0
Fortführung	0	$C(T)$

6. Wiederholung des Vorgangs für alle Perioden

Least-Squares Monte Carlo Ansatz (2)

- ▶ Beispiel: Bewertung eines Vertrags mit Kündigungsoption
 1. Monte Carlo Simulationen
 2. Berechnung der Cashflows $C(T)$ zum Laufzeitende unter der Annahme, dass die Kündigungsoption zu keinem Zeitpunkt ausgeübt wurde
 3. Diskontierung der Cashflows um eine Periode und Bestimmung des „Fortführungswerts“ durch Regression
 4. Entscheidung, ob der VN den Vertrag zu $t = T - 1$ kündigt
 5. Bestimmung der „neuen“ zukünftigen Cashflows, d.h.

Entscheidung	Cashflow zu	
	$T - 1$	T
Kündigung	Rückkaufswert	0
Fortführung	0	$C(T)$

6. Wiederholung des Vorgangs für alle Perioden

Probleme:

- ▶ Bestimmung der „neuen“ zukünftigen Cashflows kann kompliziert sein, wenn Vertrag nach Ausübung der Option nicht beendet ist
- ▶ Qualität der Regressionsfunktion für verschiedene Optionen (z.B. Entnahmen bei GMWBs)

Vergleich der Ergebnisse

Pfade pro Knoten	$\hat{V}_0$	$\hat{v}_0$	Zeit
1	10.523,4	10.055,0	< 1 s
2	10.411,0	10.051,6	15 s
3	10.395,6	10.100,3	11 min 37 s
4	10.388,8	10.169,8	2 h 47 min
5	10.380,2	10.228,6	$\approx$ 1 Tag
6	10.378,6	10.270,3	$\approx$ 6 Tage
7	10.375,6	10.293,8	$\approx$ 30 Tage

Tabelle: „Nested Simulations“, MUSS-Fall, BS-Modell

- ▶ PDE Ansatz: 10.360,4 in $\approx$ 10 Minuten
 - ▶ LSM Ansatz: 10.361,2 in $\approx$ 24 Sekunden²
- ⇒ LSM liefert ähnlich gute Ergebnisse und ist wesentlich schneller!

²Die Berechnungen wurden auf einem Linux-Rechner mit Pentium IV 2.40 Ghz CPU und 2.0 GB RAM durchgeführt.

- 1 Einführung
- 2 Nested Simulations bei der Bewertung von Optionen
 - Einfacher Monte Carlo Ansatz
 - PDE Ansatz
 - Least-Squares Monte Carlo Ansatz
- 3 Nested Simulations und Solvency II
 - Ansatz über Nested Simulations
 - Least-Squares Monte Carlo Ansatz
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Einführung: Solvency II

- ▶ Solvency II: Neue Rahmenrichtlinie für „Beaufsichtigung von Versicherungsunternehmen“ in der Europäischen Union
- ▶ Zentraler Punkt: Bestimmung des **Solvency Capital Requirements** (SCR) für einen Zeitraum von einem Jahr auf Basis von marktkonsistenter Bewertung von Assets und Liabilities
- ▶ Standardmodell: Approximation des SCR durch „Square-Root Formula“
⇒ häufig keine angemessene Modellierung (siehe z.B. Pfeifer/Strassburger (2008)).
- ▶ Alternative: Multivariater Ansatz auf Basis eines stochastischen Unternehmensmodells (Internes Modell).

Einführung: Solvency II

- ▶ Solvency II: Neue Rahmenrichtlinie für „Beaufsichtigung von Versicherungsunternehmen“ in der Europäischen Union
- ▶ Zentraler Punkt: Bestimmung des **Solvency Capital Requirements** (SCR) für einen Zeitraum von einem Jahr auf Basis von marktkonsistenter Bewertung von Assets und Liabilities
- ▶ Standardmodell: Approximation des SCR durch „Square-Root Formula“
⇒ häufig keine angemessene Modellierung (siehe z.B. Pfeifer/Strassburger (2008)).
- ▶ Alternative: Multivariater Ansatz auf Basis eines stochastischen Unternehmensmodells (Internes Modell).
- ▶ Probleme:
 - ▶ Bewertung von LV-Verträgen mit geschlossenen Formeln meist nicht möglich
 - ▶ Numerische Probleme und Rechenzeitprobleme

Wichtige Definitionen

1. Available Capital (AC_0)

- ▶ Kapital, das zum Zeitpunkt $t = 0$ als Puffer für finanziellen Verluste zur Verfügung steht

Wichtige Definitionen

1. Available Capital (AC_0)

- ▶ Kapital, das zum Zeitpunkt $t = 0$ als Puffer für finanziellen Verluste zur Verfügung steht

Marktkonsistente Bewertung von Assets und Liabilities

$$AC_0 := MVA_0 - MVL_0 \approx MCEV_0$$

Wichtige Definitionen

1. Available Capital (AC_0)

- ▶ Kapital, das zum Zeitpunkt $t = 0$ als Puffer für finanziellen Verluste zur Verfügung steht

Marktkonsistente Bewertung von Assets und Liabilities

$$AC_0 := MVA_0 - MVL_0 \approx MCEV_0$$

- ▶ $MCEV_0$ bezeichnet den Market Consistent Embedded Value, d.h. $MCEV_0 = ANAV_0 + PVFP_0 - CoC_0$, where
 - ▶ $ANAV_0$ wird aus bilanziellem Eigenkapital abgeleitet
 - ▶ $PVFP_0$ ist der Present Value of Future Profits (nach Steuern)
 - ▶ CoC_0 bezeichnet Cost-of-Capital (hier keine weitere Berücksichtigung).

Wichtige Definitionen

1. Available Capital (AC_0)

- ▶ Kapital, das zum Zeitpunkt $t = 0$ als Puffer für finanziellen Verluste zur Verfügung steht

Marktkonsistente Bewertung von Assets und Liabilities

$$AC_0 := MVA_0 - MVL_0 \approx MCEV_0$$

- ▶ $MCEV_0$ bezeichnet den Market Consistent Embedded Value, d.h. $MCEV_0 = ANAV_0 + PVFP_0 - CoC_0$, where
 - ▶ $ANAV_0$ wird aus bilanziellem Eigenkapital abgeleitet
 - ▶ $PVFP_0$ ist der Present Value of Future Profits (nach Steuern)
 - ▶ CoC_0 bezeichnet Cost-of-Capital (hier keine weitere Berücksichtigung).
- ▶ Wesentliche Aufgabe: Berechnung von $PVFP_0$.

Wichtige Definitionen

2. Solvency Capital Requirement (SCR)

- ▶ SCR basiert auf Available Capital zu $t = 1$, wobei $AC_1 := MCEV_1 + X_1$ und X_1 beschreibt die Cashflows des Aktionärs zu $t = 1$.

Wichtige Definitionen

2. Solvency Capital Requirement (SCR)

- ▶ SCR basiert auf Available Capital zu $t = 1$, wobei $AC_1 := MCEV_1 + X_1$ und X_1 beschreibt die Cashflows des Aktionärs zu $t = 1$.
- ▶ Intuition: Ein Versicherungsunternehmen ist solvent wenn das Available Capital zu $t = 1$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. $\alpha = 99,5\%$ positiv ist .
- ▶ Betrachtung der Verlustfunktion $L := AC_0 - AC_1 / (1 + i)$ wobei i die einjährige Spotrate zu $t = 0$ bezeichnet

Wichtige Definitionen

2. Solvency Capital Requirement (SCR)

- ▶ SCR basiert auf Available Capital zu $t = 1$, wobei $AC_1 := MCEV_1 + X_1$ und X_1 beschreibt die Cashflows des Aktionärs zu $t = 1$.
- ▶ Intuition: Ein Versicherungsunternehmen ist solvent wenn das Available Capital zu $t = 1$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. $\alpha = 99,5\%$ positiv ist.
- ▶ Betrachtung der Verlustfunktion $L := AC_0 - AC_1/(1 + i)$ wobei i die einjährige Spotrate zu $t = 0$ bezeichnet

Definition SCR

$$SCR := \operatorname{argmin}_x \{P(AC_0 - AC_1/(1 + i) > x) \leq 0,5\% \} = VaR_{99,5\%}(L)$$

Wichtige Definitionen

2. Solvency Capital Requirement (SCR)

- ▶ SCR basiert auf Available Capital zu $t = 1$, wobei $AC_1 := MCEV_1 + X_1$ und X_1 beschreibt die Cashflows des Aktionärs zu $t = 1$.
- ▶ Intuition: Ein Versicherungsunternehmen ist solvent wenn das Available Capital zu $t = 1$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. $\alpha = 99,5\%$ positiv ist.
- ▶ Betrachtung der Verlustfunktion $L := AC_0 - AC_1/(1 + i)$ wobei i die einjährige Spotrate zu $t = 0$ bezeichnet

Definition SCR

$$SCR := \operatorname{argmin}_x \{P(AC_0 - AC_1/(1 + i) > x) \leq 0,5\% \} = VaR_{99,5\%}(L)$$

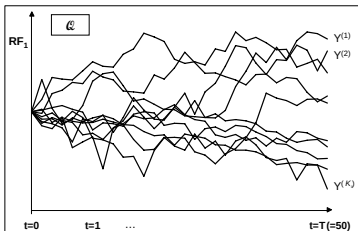
- ▶ Wesentliche Aufgabe: Berechnung des 99,5%-Quantils von $-AC_1$.

Bewertung zu $t = 0$

- ▶ Ziel: $AC_0 = \underbrace{ANAV_0}_{\text{aus HGB-Bilanz}} + \underbrace{\mathbb{E}^Q \left[\sum_{t=1}^T \exp(-\int_0^t r_u du) X_t \right]}_{=: V_0}$
- ▶ Problem: Keine geschlossenen Formeln für V_0

Bewertung zu $t = 0$

- Ziel: $AC_0 = \underbrace{ANAV_0}_{\text{aus HGB-Bilanz}} + \underbrace{\mathbb{E}^Q \left[\sum_{t=1}^T \exp(-\int_0^t r_u du) X_t \right]}_{=: V_0}$
- Problem: Keine geschlossenen Formeln für V_0



- Monte Carlo Simulationen: $\tilde{V}_0(K_0) = \frac{1}{K_0} \sum_{k=1}^{K_0} \sum_{t=1}^T \exp\left(-\int_0^t r_u^{(k)} du\right) X_t^{(k)}$

Bewertung zu $t = 1$

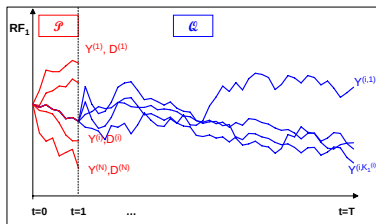
- Ziel: Verteilung von

$$AC_1 = ANAV_1 + \underbrace{\mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=2}^T \exp\left(-\int_1^t r_u du\right) X_t \middle| (Y_1, D_1) \right]}_{=: V_1} + X_1 \sim F$$

Bewertung zu $t = 1$

- Ziel: Verteilung von

$$AC_1 = \underbrace{ANAV_1 + \mathbb{E}^Q \left[\sum_{t=2}^T \exp\left(-\int_1^t r_u du\right) X_t \middle| (Y_1, D_1) \right]}_{=: V_1} + X_1 \sim F$$



Simulation von	N	einjährige Pfade „unter P “: $(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)})$
Simulation von	K_1	Pfade „unter Q “ beginnend in $(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)})$
$N \times K_1$		Pfade

Schätzer beim Ansatz über Nested Simulations

Schätzer für SCR

Wir schätzen SCR mit

$$\widetilde{\text{SCR}} = \widetilde{\text{AC}}_0 + \frac{\widetilde{Z}_{(\alpha N)}}{1+i}$$

wobei $\widetilde{Z}_{(\alpha N)}$ das α -Quantil der empirischen Verteilungsfunktion basierend auf $-\widetilde{\text{AC}}_1^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, ist.

Schätzer beim Ansatz über Nested Simulations

Schätzer für SCR

Wir schätzen SCR mit

$$\widetilde{\text{SCR}} = \widetilde{\text{AC}}_0 + \frac{\widetilde{Z}_{(\alpha N)}}{1+i}$$

wobei $\widetilde{Z}_{(\alpha N)}$ das α -Quantil der empirischen Verteilungsfunktion basierend auf $-\widetilde{\text{AC}}_1^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, ist.

► Fehlerquellen bei der Schätzung

1. Schätzung von AC_0 mit nur K_0 Pfaden
2. Schätzung des Quantils mit nur N Real-World-Szenarien
3. Schätzung von $\text{AC}_1^{(i)}$ mit nur K_1 inneren Simulationen $\forall i$

⇒ Analyse der Fehler bei der Schätzung von $\widetilde{\text{SCR}}$

Fehleranalyse

- Idee: Analysiere Mean-Square Error (MSE)

$$\begin{aligned}
 \text{MSE} &= \mathbb{E} \left[(\widetilde{\text{SCR}} - \text{SCR})^2 \right] = \text{Var}(\widetilde{\text{SCR}}) + \left[\underbrace{\mathbb{E}(\widetilde{\text{SCR}}) - \text{SCR}}_{\text{bias}} \right]^2 \\
 &\approx \frac{\sigma_0^2}{K_0} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(N+2)f^2(\text{SCR})} + \frac{\theta_\alpha^2}{K_1^2 \cdot f^2(\text{SCR})}
 \end{aligned}$$

Fehleranalyse

- Idee: Analysiere Mean-Square Error (MSE)

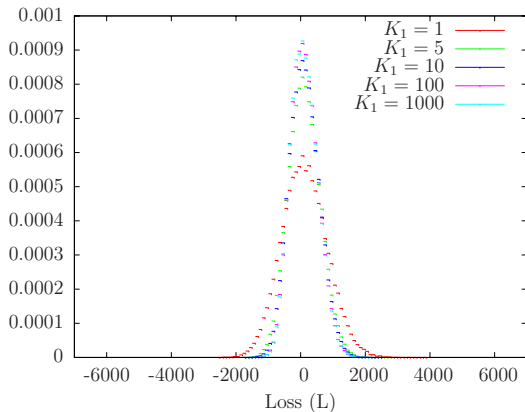
$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \mathbb{E} \left[(\widetilde{\text{SCR}} - \text{SCR})^2 \right] = \text{Var}(\widetilde{\text{SCR}}) + \left[\underbrace{\mathbb{E}(\widetilde{\text{SCR}}) - \text{SCR}}_{\text{bias}} \right]^2 \\ &\approx \frac{\sigma_0^2}{K_0} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(N+2)f^2(\text{SCR})} + \frac{\theta_\alpha^2}{K_1^2 \cdot f^2(\text{SCR})} \end{aligned}$$

- Bias hängt im Wesentlichen von der Anzahl der inneren Simulationen ab
- Bias ist in der Praxis positiv, d.h. wir **überschätzen SCR**
- Problem: Um Bias gering zu halten, darf K_1 nicht zu klein sein → **Hoher Rechenaufwand!**

Beispielvertrag

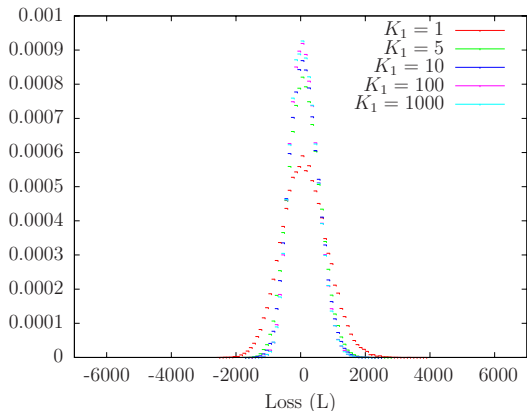
- ▶ Termfix-Vertrag mit Mindestverzinsung
- ▶ kein biometrisches Risiko
- ▶ Kapitalmarktmodell: Erweitertes Black-Scholes-Model mit stochastischen Zinsen
- ▶ Gewinnbeteiligung: *MUSS-Fall*
- ▶ Dividendenzahlungen d_t für die Aktionäre
- ▶ Falls notwendig, erhält das Unternehmen Nachschüsse c_t der Anteilseigner

Bias bei Nested Simulations, $N = 100.000$



K_1	$\widetilde{SCR}$	$AC_0/\widetilde{SCR}$
1	1.994,0	94%
5	1.404,7	134%
10	1.332,7	141%
100	1.261,2	149%
1000	1.246,3	151%

Bias bei Nested Simulations, $N = 100.000$



K_1	$\widetilde{SCR}$	$AC_0/\widetilde{SCR}$
1	1.994,0	94%
5	1.404,7	134%
10	1.332,7	141%
100	1.261,2	149%
1000	1.246,3	151%

► Wahl von K_1 hat starken Einfluss auf Schätzung des SCR!

⇒ Optimierung der Parameter N , K_0 und K_1 sinnvoll

Variance-Bias Tradeoff – Wahl von K_0 , N und K_1

- ▶ Idee: Minimiere Mean-Square Error (MSE)
- ▶ Ähnlich wie bei Gordy/Juneja (2008), erhalten wir:

Optimierungsproblem in K_0 , N und K_1

$$\text{MSE} \approx \frac{\sigma_0^2}{K_0} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(N+2)f^2(\text{SCR})} + \frac{\theta_\alpha^2}{K_1^2 \cdot f^2(\text{SCR})} \rightarrow \min$$

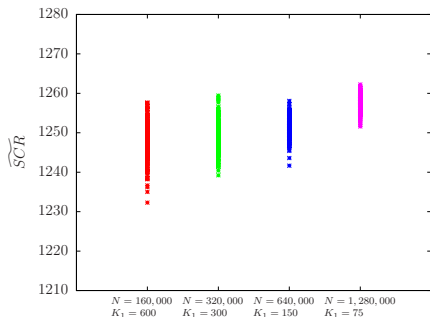
mit der Budgetrestriktion $K_0 + N \cdot K_1 = \Gamma$.

- ▶ Schätzung von θ_α durch Pilotsimulation mit $N = 100.000$, $K_1 = 100$ und Regression/Finite Differenzen:

$$\hat{\theta}_\alpha \approx 0,027 \Rightarrow (K_0; N; K_1) = (1.500.000; 320.000; 300) \text{ ungefähr optimal}$$

- ▶ Berechnung dauert ungefähr **15 Minuten**

Vergleich von verschiedenen Parameterkombinationen



N	K_1	Mean ($\widehat{SCR}$)	Empirical Variance	Estimated Bias	Estimated MSE	Corrected Mean
160.000	600	1.247,7	24,6	1,4	26,6	1.246,3
320.000	300	1.249,3	15,8	2,9	24,0	1.246,4
640.000	150	1.251,3	7,9	5,7	40,6	1.245,6
1.280.000	75	1.257,4	4,2	11,4	133,1	1.246,1

Tabelle: Wahl von N und K_1 ($K_0 = 1.500.000$), $\Gamma = 97.500.000$, 150 Runs

Least-Squares-Algorithmus

- ▶ Basiert auf LSM-Ansatz von Longstaff/Schwartz (2001)

Least-Squares-Algorithmus

- ▶ Basiert auf LSM-Ansatz von Longstaff/Schwartz (2001)
- ▶ Algorithmus:
 - ▶ Simulation von N Szenarien (erstes Jahr $\mathcal{P}$, restliche Jahre $\mathcal{Q}$)

$$PV_1^{(i)}(\omega_i) := \sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_s(\omega_i) ds \right\} X_t(\omega_i) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[PV_1^{(i)} \middle| \mathcal{F}_1 \right] + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

Least-Squares-Algorithmus

- ▶ Basiert auf LSM-Ansatz von Longstaff/Schwartz (2001)
- ▶ Algorithmus:

- ▶ Simulation von N Szenarien (erstes Jahr $\mathcal{P}$, restliche Jahre $\mathcal{Q}$)

$$PV_1^{(i)}(\omega_i) := \sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_s(\omega_i) ds \right\} X_t(\omega_i) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[PV_1^{(i)} \middle| \mathcal{F}_1 \right] + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

- ▶ 1. Schritt : Approximation von V_1 durch eine endliche Summe von geeigneten Basisfunktionen

$$V_1 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=2}^T \exp \left(- \int_1^t r_u du \right) X_t \middle| (Y_1, D_1) \right] \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot e_k(Y_1, D_1)$$

Least-Squares-Algorithmus

- Basiert auf LSM-Ansatz von Longstaff/Schwartz (2001)
- Algorithmus:

- Simulation von N Szenarien (erstes Jahr $\mathcal{P}$, restliche Jahre $\mathcal{Q}$)

$$PV_1^{(i)}(\omega_i) := \sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_s(\omega_i) ds \right\} X_t(\omega_i) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[PV_1^{(i)} \middle| \mathcal{F}_1 \right] + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

- 1. Schritt : Approximation von V_1 durch eine endliche Summe von geeigneten Basisfunktionen

$$V_1 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=2}^T \exp \left(- \int_1^t r_u du \right) X_t \middle| (Y_1, D_1) \right] \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot e_k(Y_1, D_1)$$

- 2. Schritt: Schätzung des unbekannten Parametervektors α mittels Regression:

$$\hat{\alpha}^{(N)} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[PV_1^{(i)} - \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot e_k \left(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)} \right) \right]^2 \right\}$$

Least-Squares-Algorithmus

- Basiert auf LSM-Ansatz von Longstaff/Schwartz (2001)

- Algorithmus:

- Simulation von N Szenarien (erstes Jahr $\mathcal{P}$, restliche Jahre $\mathcal{Q}$)

$$PV_1^{(i)}(\omega_i) := \sum_{t=2}^T \exp \left\{ - \int_1^t r_s(\omega_i) ds \right\} X_t(\omega_i) = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[PV_1^{(i)} \middle| \mathcal{F}_1 \right] + \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

- 1. Schritt : Approximation von V_1 durch eine endliche Summe von geeigneten Basisfunktionen

$$V_1 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[\sum_{t=2}^T \exp \left(- \int_1^t r_u du \right) X_t \middle| (Y_1, D_1) \right] \approx \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot e_k(Y_1, D_1)$$

- 2. Schritt: Schätzung des unbekannten Parametervektors α mittels Regression:

$$\hat{\alpha}^{(N)} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[PV_1^{(i)} - \sum_{k=1}^M \alpha_k \cdot e_k(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) \right]^2 \right\}$$

- Schätzung des Available Capitals:

$$\widehat{AC}_1^{(i)} = \text{ANAV}_1^{(i)} + \sum_{k=1}^M \hat{\alpha}_k^{(N)} \cdot e_k(Y_1^{(i)}, D_1^{(i)}) + X_1^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq N$$

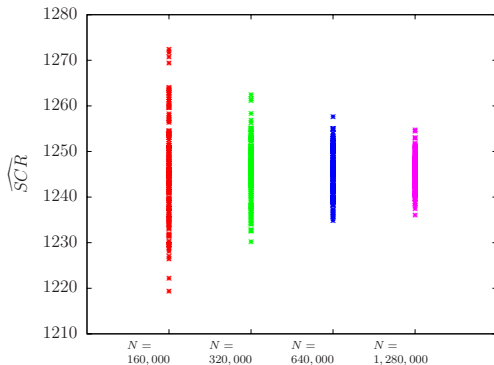
Wahl der Regressionsfunktion beim LSM Ansatz

#	Regression Function	Mean (SCR)
1	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1$	1.007,3
2	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2$	1.165,5
3	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1$	1.272,6
4	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2$	1.276,5
5	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1$	1.233,2
6	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1$	1.233,9
7	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1 + \hat{\alpha}_7^{(N)} \cdot A_1 \cdot e^{r_1}$	1.241,3
8	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1 + \hat{\alpha}_7^{(N)} \cdot A_1 \cdot e^{r_1} + \hat{\alpha}_8^{(N)} \cdot L_1 \cdot e^{r_1}$	1.244,5
9	$\hat{\alpha}_0^{(N)} + \hat{\alpha}_1^{(N)} \cdot A_1 + \hat{\alpha}_2^{(N)} \cdot A_1^2 + \hat{\alpha}_3^{(N)} \cdot r_1 + \hat{\alpha}_4^{(N)} \cdot r_1^2 + \hat{\alpha}_5^{(N)} \cdot L_1 + \hat{\alpha}_6^{(N)} \cdot x_1 + \hat{\alpha}_7^{(N)} \cdot A_1 \cdot e^{r_1} + \hat{\alpha}_8^{(N)} \cdot L_1 \cdot e^{r_1} + \hat{\alpha}_9^{(N)} \cdot e^{A_1/10000}$	1.245,9

Tabelle: SCR für verschiedene Regressionsfunktionen, $N = 320.000$

- ▶ Hoher Einfluss der Basisfunktionen auf Schätzung
- ▶ Bei geeigneter Wahl der Basisfunktionen liegt das geschätzte SCR nahe am Wert mittels Nested Simulations
- ▶ Regressionsfunktion kann meist auch bei Veränderungen der Kapitalmarktparameter weiter verwendet werden
- ▶ Berechnung dauert ungefähr **25 Sekunden**

Vergleich für verschiedene N beim LSM-Ansatz



N	Mean ($\widehat{SCR}$)	Empirical Variance	Solvency Ratio
160.000	1.245,4	110,9	151%
320.000	1.245,9	39,1	151%
640.000	1.245,3	24,0	151%
1.280.000	1.245,4	12,1	151%

Tabelle: LSM Ansatz, 150 Runs

- 1 Einführung
- 2 Nested Simulations bei der Bewertung von Optionen
 - Einfacher Monte Carlo Ansatz
 - PDE Ansatz
 - Least-Squares Monte Carlo Ansatz
- 3 Nested Simulations und Solvency II
 - Ansatz über Nested Simulations
 - Least-Squares Monte Carlo Ansatz
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

- ▶ Nested Simulations:
 - ▶ Hoher Rechen- und Zeitaufwand
 - ▶ Schätzer haben einen Bias (kann sehr groß sein!)

Zusammenfassung

- ▶ Nested Simulations:
 - ▶ Hoher Rechen- und Zeitaufwand
 - ▶ Schätzer haben einen Bias (kann sehr groß sein!)
- ▶ LSM:
 - ▶ Sehr schnell bei relativ guten Ergebnissen
 - ▶ Wahl der Regressionsfunktion hat großen Einfluss auf Ergebnisse

Zusammenfassung

- ▶ Nested Simulations:
 - ▶ Hoher Rechen- und Zeitaufwand
 - ▶ Schätzer haben einen Bias (kann sehr groß sein!)
- ▶ LSM:
 - ▶ Sehr schnell bei relativ guten Ergebnissen
 - ▶ Wahl der Regressionsfunktion hat großen Einfluss auf Ergebnisse

Ausblick

- ▶ Verbesserung der Ergebnisse durch Varianzreduktion (Antithetics, Control Variates)
- ▶ Einsatz von Quasi-Monte-Carlo Methoden
- ▶ Fokussierung auf den Tail der Verteilung bei der Berechnung des SCR durch „Screening“
- ▶ Theoretische Analyse des Bias beim LSM im Rahmen von Solvency II

Literatur



D. Bauer, R. Kiesel, A. Kling, and J. Ruß: Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, 39:171–183, 2006.



D. Bauer, D. Bergmann und R. Kiesel: On the risk-neutral valuation of life insurance contracts with numerical methods in view, Working Paper, Universität Ulm, 2009.



D. Bauer, D. Bergmann und A. Reuß: Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach, Working Paper, Universität Ulm, 2009.



M.B. Gordy und S. Juneja: Nested simulations in portfolio risk measurement, 2008. Finance and Economics Discussion Series, submitted to Management Science.



F.A. Longstaff und E.S. Schwartz: Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14:113–147, 2001.



D. Pfeifer und D. Strassburger: Solvency II: stability problems with the SCR aggregation formula. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:61–77, 2008.



K. Zaglauer und D. Bauer: Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts in a stochastic interest rate environment. *Insurance: Mathematics and Economics*, 43:29–40, 2008.

Kontakt



ulm university universität
uulm

ifa

Institut für Finanz- und
Aktuarwissenschaften

Daniela Bergmann
Universität Ulm
Helmholtzstr. 18
89069 Ulm
Germany

daniela.bergmann@uni-ulm.de

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!