

Dynamische Risikomaße in der Unternehmenssteuerung

Jochen Wolf

FH Koblenz

Ulm, 24.01.2012

Agenda

- 1 statische Risikomaße
 - Erinnerungen
 - Einsatzmöglichkeiten und Grenzen
- 2 Allgemeine dynamische Risikomaße
- 3 Filtrationen - „revisited“
- 4 dynamische Risikomaße auf Produktökonomien

prominente Beispiele (1)

Definition

Der **Value at Risk** zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist definiert als der minimale Verlust, der in den $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ der schlechtesten Szenarien entsteht:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := F_X^{\leftarrow}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\},$$

wobei F_X die Verteilungsfunktion und $F_X^{\leftarrow}$ ihre Pseudoinverse ist.

Definition

Der **Tail Value at Risk** (TVaR) zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist definiert als der erwartete Verlust in den $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ schlechtesten Szenarien:

$$\text{TVaR}_\alpha(X) := \mathbb{E}(X \mid X > \text{VaR}_\alpha(X))$$

prominente Beispiele (2)

Definition

Der **Expected Shortfall** (Average Value at Risk) zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist definiert durch

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_z(X) dz.$$

Satz

Es gilt

$$ES_{\alpha}(X) = \lambda_{\alpha} \cdot TVaR_{\alpha}(X) + (1 - \lambda_{\alpha}) \cdot VaR_{\alpha}(X)$$

mit $\lambda_{\alpha} = \frac{\mathbb{P}(X > VaR_{\alpha}(X))}{1-\alpha}.$

prominente Beispiele (3)

alternative Berechnungsmethode für den Expected Shortfall:

Lemma

Es sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$1_{X,x,\alpha} = 1_{\{X > x\}} + \beta_{X,\alpha}(x) \cdot 1_{\{X=x\}},$$

wobei

$$\beta_{X,\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X \leq x) - \alpha}{\mathbb{P}(X=x)} & \text{falls } \mathbb{P}(X=x) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

- ❶ $1_{X, VaR_\alpha(X), \alpha}(\omega) \in [0, 1]$ für alle $\omega \in \Omega$,
- ❷ $\mathbb{E}(1_{X, VaR_\alpha(X), \alpha}) = 1 - \alpha$,
- ❸ $\mathbb{E}(X \cdot 1_{X, VaR_\alpha(X), \alpha}) = (1 - \alpha) \cdot ES_\alpha(X)$.

Axiomatik nach Artzner et al.

Artzner, Delbaen, Eber und Heath (1999) begründen eine Axiomatik des Risikomaßes, die Eigenschaften eines intuitiven Risikobegriffs aufgreift.

Definition

Ein Risikomaß $\varrho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **kohärent**, falls es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Translationsinvarianz: $\varrho(X + c) = \varrho(X) + c \quad \forall X \in \mathcal{M}, \forall c \in \mathbb{R}$
- Monotonie: $X_1 \geq X_2$ f.ü. $\Rightarrow \varrho(X_1) \geq \varrho(X_2) \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{M}$
- positive Homogenität: $\varrho(cX) = c\varrho(X) \quad \forall X \in \mathcal{M}, \forall c \in \mathbb{R}^+$
- Subadditivität: $\varrho(X_1 + X_2) \leq \varrho(X_1) + \varrho(X_2) \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{M}$

klassische Einsatzfelder

Risikomaße werden eingesetzt

- zum Vergleich verschiedener Risiken,
- als Input für risikoadjustierte Erfolgsgrößen,
- zur Prämienberechnung,
- zur Ermittlung der Risikomarge versicherungstechnischer Rückstellungen,
- zur Ermittlung des benötigten Risikokapitals (Solvenzkapital, ökonomisches Kapital).

Das *ökonomische Sicherheitsniveau* der Risikokapitalausstattung wird dabei durch folgende Faktoren festgelegt:

- Typ des Risikomaßes
- technisches Konfidenzniveau
- **Zeithorizont**

Grenzen

Die Wahl einer Periode als Zeithorizont wirft angesichts des langfristigen Charakters des Versicherungsgeschäfts Fragen auf, z.B.

- Risikokapitalausstattung in künftigen Perioden? (ORSA, ökonomische Steuerung)
- Abhängigkeiten zwischen den Perioden?
- Änderungen des eigenen Risikoprofils?
- Änderungen des Umfelds (Kapitalmarkt)?

zentrale Perspektive: Informationszuwachs im Laufe der Zeit

Agenda

- 1 statische Risikomaße
- 2 Allgemeine dynamische Risikomaße
- 3 Filtrationen - „revisited“
- 4 dynamische Risikomaße auf Produktökonomien

Definition

Definition

Seien $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ eine Filtration auf Ω . Für jedes t sei $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ ein Vektorraum $\mathcal{F}_t$ -messbarer Funktionen. Ein *dynamisches Risikomaß* ist eine Familie $(\rho_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ von Abbildungen

$$\rho_t: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R}),$$

so dass gilt:

- ❶ $X_1 \geq X_2$ f.s. $\Rightarrow \rho_t(X_1) \geq \rho_t(X_2)$ f.s. (Monotonie);
- ❷ Für $K \in \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ gilt $\rho_t(X + K) = \rho_t(X) + K$ f.s. (Translationsinvarianz).

Kohärenz

Definition

Ein dynamisches Risikomaß $(\rho_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ heißt *kohärent*, falls gilt:

- ❶ $\rho_t(KX) = K\rho_t(X)$ f.s. für alle $K \in \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ mit $K \geq 0$ f.s. und $KX \in \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R})$ (Homogenität);
- ❷ $\rho_t(X_1 + X_2) \leq \rho_t(X_1) + \rho_t(X_2)$ f.s. (Subadditivität).

Konstruktionsmöglichkeit (1)

duale Darstellung

Satz

Sei $\mathcal{W}$ eine Teilmenge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit folgenden Eigenschaften:

- ❶ Für jedes $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$ und jedes $Q \in \mathcal{W}$ existiert $\mathbb{E}_Q(X)$.
- ❷ $Q \ll \mathbb{P}$ für alle $Q \in \mathcal{W}$.

Dann ist durch

$$\rho^{\mathcal{W}}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{W}} \{\mathbb{E}_Q(X)\}$$

ein kohärentes Risikomaß definiert.

Konstruktionsmöglichkeit (2)

Satz

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, n\}}$ sei eine Filtration mit $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}$. Für $t \in \{0, \dots, n\}$ sei $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ der Vektorraum der f.s. beschränkten, $\mathcal{F}_t$ -messbaren Funktionen. $\mathcal{W}$ sei eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Ω .

Dann ist die Familie von Abbildungen

$$\rho_t^{\mathcal{W}}: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \rho_t^{\mathcal{W}}(X) = \text{esssup}_{\mathbb{Q} \in \mathcal{W}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$$

ein kohärentes, dynamisches Risikomaß.

Ist der ES problematisch?

Beispiel.

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1[\times]0, 1[, \mathcal{B}([0, 1[\times]0, 1[), \lambda^2)$ mit der Produktfiltration

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \{A \times]0, 1[: A \in \mathcal{B}([0, 1[)\}, \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}([0, 1[\times]0, 1[)$$

- Für $\alpha \in]0, 1[$ sei

$$\mathcal{W}_\alpha = \left\{ \mathbb{Q}: \mathbb{Q} \text{ ist ein W.maß mit } \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \text{ und } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{1-\alpha} \right\}.$$

- Dann gilt $\rho_0^{\mathcal{W}_\alpha}(X) = ES_\alpha(X)$, $\rho_1^{\mathcal{W}_\alpha}(X) = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$.

Braucht man also Zusatzbedingungen?

In der Literatur finden sich axiomatisch eingeführte Bedingungen zur zeitlichen Konsistenz.

Definition

Ein dynamisches Risikomaß ρ_t heißt *vergleichskonsistent*, falls für alle Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$

$$\rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y) \text{ f.s.} \Rightarrow \rho_t(X) \geq \rho_t(Y) \text{ f.s.}$$

gilt.

Agenda

- 1 statische Risikomaße
- 2 Allgemeine dynamische Risikomaße
- 3 Filtrationen - „revisited“
- 4 dynamische Risikomaße auf Produktökonomien

Erinnerung (1)

- Sei $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Eine *Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist eine Menge von σ -Algebren auf Ω mit

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n.$$

- Ein *adaptierter stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^k$* ist eine Abbildung

$$X: \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (\omega, t) \mapsto X_t(\omega),$$

wobei für jedes $t \in \mathbb{T}$ die Abbildung $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ bezüglich $\mathcal{F}_t$ messbar ist.

- $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ als Best Estimate für das Endergebnis zum Zeitpunkt t

Erinnerung (2)

- $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ seien σ -Algebren auf den Mengen $\Omega_1, \dots, \Omega_k$. Die *Produkt- σ -Algebra* auf der Produktmenge $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_k$ ist dann durch

$$\bigotimes_{t=1}^k \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_k = \sigma(A_1 \times \dots \times A_k \mid A_t \in \mathcal{A}_t \text{ für } t \in \{1, \dots, k\})$$

gegeben, wobei wir die Konvention

$$A_1 \times \dots \times A_{t-1} \times \emptyset \times A_{t+1} \times \dots \times A_k = \emptyset$$

benutzen.

Modellierung des Informationszuwachses (1)

Definition

Sei $\mathbb{T} = \{0, \dots, n\}$ und für $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ $\mathcal{A}_t$ eine σ -Algebra auf der Menge Ω_t . Die *Produktfiltration* auf dem kartesischen Produkt $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ ist durch

$$\mathcal{F}_t = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & \text{falls } t = 0, \\ \bigotimes_{s=1}^t \mathcal{A}_s \otimes \bigotimes_{s=t+1}^n \{\emptyset, \Omega_s\} & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

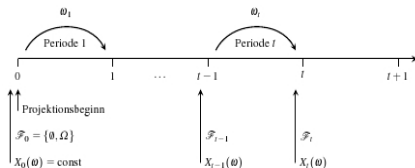


Abb. 2.4 Illustration zu Definition 2.12. Die während der Periode t auftretenden zufälligen Ereignisse werden durch die Ziehung $\omega_t \in \Omega_t$ beschrieben. Ist X_t ein adaptierter stochastischer Prozess, so sind zum Zeitpunkt t die Werte $X_0(\omega), \dots, X_t(\omega)$ bekannt, da sie nur von $(\omega_1, \dots, \omega_t)$ abhängen

Modellierung des Informationszuwachses (2)

Definition

Sei $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ und

$$\pi_t: \Omega \rightarrow \prod_{s=1}^t \Omega_s \quad \omega \mapsto \pi_t(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_t)$$

die Projektion auf die ersten t Faktoren. Für $\omega \in \Omega$ und $t \in \{1, \dots, n\}$ ist die t -Faser durch ω durch

$$F_t(\omega) = \pi_t^{-1}(\pi_t(\omega))$$

gegeben, und wir setzen $F_0(\omega) = \Omega$. Für $w \in \pi_t(\Omega)$ ist die t -Faser über w die Menge $F_t(w) = \pi_t^{-1}(w)$.

Schreibweise: $\Omega_{\mathbf{B}}^t = \prod_{s=1}^t \Omega_s$, und $\Omega_{\mathbf{B}}^t = \prod_{s=t+1}^n \Omega_s$, $\pi_t(\omega) = \omega_{\mathbf{B}}^t \in \Omega_{\mathbf{B}}^t$
 $\omega = (\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t)$ mit $\omega_{\mathbf{F}}^t \in \Omega_{\mathbf{F}}^t$

Modellierung des Informationszuwachses (3)

Es gilt:

- Eine Abbildung $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathcal{F}_t$ -messbar, wenn sie $\mathcal{F}_n$ -messbar und auf den Fasern $F_t(\omega)$ konstant ist.
- Ist $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$ und $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ ein adaptierter stochastischer Prozess, so hängt $X_t(\omega)$ nur von den ersten t Komponenten $\omega_1, \dots, \omega_t$ ab.

Produktökonomie (1)

Definition

Für $t \in \{1, \dots, n\}$ sei (Ω_t, μ_t) ein Maßraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ die Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{t=1}^n \Omega_t$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ sei bzgl. des Produktmaßes $\mu = \bigotimes_{t=1}^n \mu_t$ absolut stetig. Dann ist $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ eine *filtrierte Produktökonomie*.

Wir schreiben $\mu_{\mathbf{B}}^t = \bigotimes_{s=1}^t \mu_s$ und $\mu_{\mathbf{F}}^t = \bigotimes_{s=t+1}^n \mu_s$.

- Die Zufallsquellen μ_t der einzelnen Perioden sind unabhängig.
- gute Eignung für Simulationsmodelle
- hinreichend allgemeine Modellierungsstruktur:
 - ▶ AR(1)-Prozess: $S_t = \alpha S_{t-1} + s\omega_t$, $t = 1, \dots, n$
 - ▶ Schadenprozess (X_1, X_2) über zwei Perioden mit der Dichte

$$p(x_1, x_2) = \exp(-x_1) \frac{10}{11x_1} \exp(-10x_2/(11x_1)) 1_{(0,\infty) \times (0,\infty)}(x_1, x_2)$$

Produktökonomie (2)

Lemma

Sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ eine filtrierte Produktökonomie und $\mathbb{P} = p\mu$. Dann gilt:

- ① Auf der Faser $F_t(\omega)$ ist bezüglich der von $\mathcal{F}_n$ induzierten σ -Algebra durch

$$\mathbb{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t}(A) = \frac{\int 1_A p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{\int p(\omega_{\mathbf{B}}^t, \omega_{\mathbf{F}}^t) d\mu_{\mathbf{F}}^t}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben.

②

$$\mathbb{E}(g \mid \mathcal{F}_t)_{|\omega_{\mathbf{B}}^t} = \frac{\int_{\Omega_{\mathbf{F}}^t} g(\omega) \cdot p(\omega) d\mu_{\mathbf{F}}^t}{\int_{\Omega_{\mathbf{F}}^t} p(\omega) d\mu_{\mathbf{F}}^t} \quad \mathbb{P}\text{-f.ü.}$$

Agenda

- 1 statische Risikomaße
- 2 Allgemeine dynamische Risikomaße
- 3 Filtrationen - „revisited“
- 4 dynamische Risikomaße auf Produktökonomien

dynamischer Value at Risk

Definition

Es sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ eine filtrierte Produktökonomie, $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ der Raum der $\mathcal{F}_t$ -messbaren Funktionen. Die durch $t \in \mathbb{T}$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$\text{VaR}_{\alpha,t}: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \text{VaR}_{\alpha,t}(X)$$

mit

$$\text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_{\mathbf{B}}^t} = \inf \left\{ x \in \mathbb{R}: \mathbb{P}_{\omega_{\mathbf{B}}^t} (X(\omega_{\mathbf{B}}^t, \cdot) \leq x) \geq \alpha \right\}$$

heißt *dynamischer Value at Risk*.

Der dynamische Value at Risk ist ein dynamisches Risikomaß.

dynamischer Expected Shortfall

Definition

Sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ eine filtrierte Produktökonomie, $\alpha \in]0, 1[$ und $\mathcal{M}_t(\Omega, \mathbb{R})$ der Raum der integrierbaren, $\mathcal{F}_t$ -messbaren Funktionen. Die durch $t \in \mathbb{T}$ parametrisierte Familie von Abbildungen

$$ES_{\alpha,t}: \mathcal{M}_n(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_t(\mathcal{F}_t, \mathbb{R}), \quad X \mapsto ES_{\alpha,t}(X)$$

mit

$$ES_{\alpha,t}(X)|_{\omega_B^t} = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\omega_B^t}} \left(X(\omega_B^t, \cdot) 1_{X(\omega_B^t, \cdot), \text{VaR}_{\alpha,t}(X)|_{\omega_B^t}, \alpha} \right)$$

heißt *dynamischer Expected Shortfall*, wobei $1_{X,x,\alpha}$ definiert ist wie auf Folie 5.

Der dynamische Expected Shortfall ist ein kohärentes dynamisches Risikomaß.

Zeitkonsistenz (1)

Definition

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Produktfiltration auf $\Omega = \prod_{s=1}^n \Omega_s$. Ein dynamisches Risikomaß $(\rho_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist

- ① *zeitkonsistent*, falls es für jede Zufallsvariable X , fast jedes $\omega \in \Omega$ und jede $\mathcal{F}_{t+1}$ -messbare Teilmenge $B \subseteq F_t(\omega)$ mit $\mathbb{P}_{\omega_B^t}(B) > 0$ und

$$\text{essinf}_B (\rho_{t+1}(X)) > \rho_t(X)|_{\omega}$$

eine $\mathcal{F}_{t+1}$ -messbare Teilmenge $C \subseteq F_t(\omega)$ gibt mit $\mathbb{P}_{\omega_B^t}(C) > 0$ und

$$\text{esssup}_C (\rho_{t+1}(X)) < \rho_t(X)|_{\omega}.$$

- ② *schwach zeitkonsistent*, falls für fast jedes ω und jedes Paar (X, t) gilt:

$$\text{essinf}_{F_t(\omega)} (\rho_{t+1}(X)) \leq \rho_t(X)|_{\omega}.$$

Zeitkonsistenz (2)

Der dynamische Value at Risk ist schwach zeitkonsistent, der dynamische Expected Shortfall zeitkonsistent.

Beispiel (1)

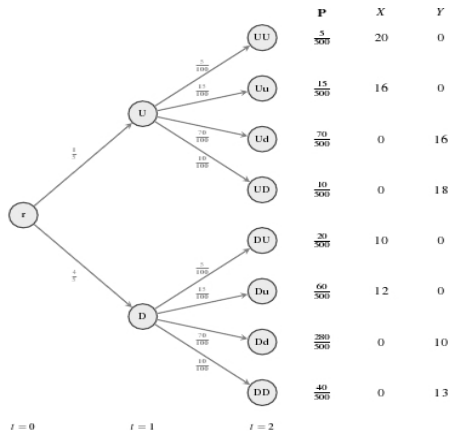


Abb. 2.9 Verletzung der Vergleichskonsistenz durch den Expected Shortfall.

Beispiel (2)

- Zum Zeitpunkt $t = 1$ gilt:

$$ES_{80\%,1}(X)_{|(U)} = \frac{20 \times 5 + 16 \times 15}{20} = \frac{340}{20} = 17,$$

$$ES_{80\%,1}(X)_{|(D)} = \frac{12 \times 15 + 10 \times 5}{20} = \frac{230}{20} = 11.5,$$

$$ES_{80\%,1}(Y)_{|(U)} = \frac{18 \times 10 + 16 \times 10}{20} = \frac{340}{20} = 17,$$

$$ES_{80\%,1}(Y)_{|(D)} = \frac{13 \times 10 + 10 \times 10}{20} = \frac{230}{20} = 11.5,$$

- Es liegt keine Vergleichskonsistenz vor, da gilt:

$$ES_{80\%,0}(X)_{|(r)} = \frac{20 \times 5 + 16 \times 15 + 12 \times 60 + 10 \times 20}{100} = \frac{1260}{100} = 12.6$$

$$ES_{80\%,0}(Y)_{|(r)} = \frac{18 \times 10 + 16 \times 70 + 13 \times 20}{100} = \frac{1560}{100} = 15.6$$

- Für $\tilde{Y} := Y - c$ mit $c \in]0, 3[$ erhalten wir

$$ES_{80\%,0}(\tilde{Y}) > ES_{80\%,0}(X), \text{ aber } ES_{80\%,1}(\tilde{Y}) < ES_{80\%,1}(X) \text{ f.s.}$$

Quelle

Kriele, M., Wolf, J., Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen, Springer, 2012.