



## Empirische Wirtschaftsforschung

### Die Schätzung einer Produktionsfunktion

Lernziel: Was ist Multikollinearität?

### Der theoretische Rahmen

Eine Produktionsfunktion vom Typ Cobb/Douglas:

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$$

$Y$  : Produktionspotential

$L$  : Zahl der Erwerbstätigen

$K$  : Kapitalbestand

$A$  : Skalierungsparameter, totale Faktorproduktivität

$\alpha$  : Produktionselastizität des Kapitals

$\beta$  : Produktionselastizität der Arbeit

$\alpha + \beta$  : Skalanelastizität

---

## Die Daten

*Daten der vierteljährlichen volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung der Bundesrepublik Deutschland, 1960.1 1989.4 (Westdeutschland), real, d.h. zu Preisen von 1980, Abgrenzung für die Gesamtwirtschaft ohne Staat*

Daten im work file W90.wf1

*YT : Bruttoinlandprodukt abz. Wertschöpfung des Staates*

*LT : Zahl der Erwerbstätigen ohne Beschäftigte beim Staat*

*K : Kapitalbestand, Unternehmen ohne Wohnungsvermietung*

## Schätzung in Logarithmen

$$\ln YT_t = \ln A + \alpha \cdot \ln K_t + \beta \cdot \ln LT_t + \varepsilon_t$$

**Ergebnis?**

## Weitere erklärende Variablen

$@SEAS(i)$  Saisondummy, 1 im  $i$ -ten Quartal

→ das Wetter als Produktionsfaktor

$T$  Trend,  $T_{1960:1} = 1$ , ansteigend um 1 in jedem Quartal

Begründung:  $A_t = \bar{A} \cdot \exp(\gamma \cdot t)$

Konstanter (exogener) technischer Fortschritt,  
die Rate des technischen Fortschritts beträgt  $\gamma$

$H$  Zahl der geleisteten Arbeitsstunden pro Erwerbstätigen

Begründung: Man schafft weniger, wenn man weniger arbeitet

$Q$  Auslastungsgrad des Kapitalbestands

Begründung:

1. Produktion = Produktionspotential · Auslastungsgrad;

2. Nur das eingesetzte Kapital trägt zur Produktion bei

→ eingesetztes Kapital = Gesamtkapital · Auslastungsgrad

$T^2$  Trendquadrat,  $T^2 = 1, 4, 9, \dots$

Begründung: Abnehmender technischer Fortschritt

Ergebnis(se): Es sieht schon ökonomisch plausibler aus.

## Weitere Möglichkeiten der empirischen Analyse

Test auf konstante Skalenerträge ( $\alpha + \beta = 1$ ),  
Gleichheit bestimmter Koeffizienten (L und H, K und Q,  $\text{coeff}(\ln Q)=1$ )

Schätzung in Differenzen

Begründung:

1. Kurzfristige Produktionselastizitäten;
2. Fehlende Variablen werden "herausdifferenziert"

Ergebnis?

Schätzung einer allgemeineren funktionalen Form:

CES Produktionsfunktion, Trans-Log Produktionsfunktion

Beispiel:  $\ln K * \ln LT$  ökonomische Interpretation?

Weitere mögliche Variablen aus der neoklassischen Theorie  
und der Theorie endogenen Wachstums:

Humankapital (Ausbildung), F&E Investitionen und Innovationen,  
Außenhandelsverflechtung und Produktivität der 'best practice'-Technologie  
(externe Effekte bzw. Spillovers) . . .

Beschränkung durch die Zahl der Freiheitsgrade der Gleichung

Lösung: Möglicherweise sektorale Daten oder Mikrodaten von Unternehmen

## Schätzung einer Cobb/Douglas Produktionsfunktion

– Arbeit und Kapital als Produktionsfaktoren

– konstanter technischer Fortschritt

$$A = \bar{A} \cdot \exp(\gamma \cdot t), \quad \frac{\partial \ln A}{\partial t} = \gamma$$

– Saisoneinflüsse auf die Produktionsfunktion

```

=====
LS // Dependent Variable is log(YT)
Sample: 1960:1 1989:4
Included observations: 120
=====

```

Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
C	-3.955084	0.647823	-6.105190	0.0000
SEAS(1)	-0.075698	0.007215	-10.49119	0.0000
SEAS(2)	-0.046199	0.006933	-6.663421	0.0000
SEAS(3)	-0.000624	0.006888	-0.090559	0.9280
log(LT)	0.823353	0.136715	6.022390	0.0000
log(K)	0.920707	0.046378	19.85215	0.0000
T	-0.002044	0.000465	-4.398415	0.0000

```

=====
R-squared          0.989932      Mean dependent var 5.589478
Adjusted R-squared 0.989397      S.D. dependent var 0.259055
S.E. of regression 0.026675      Akaike info criter -7.191502
Sum squared resid  0.080405      Schwartz criterion -7.028898
Log likelihood     268.2175      F-statistic         1851.741
Durbin-Watson stat 1.072566      Prob(F-statistic)  0.000000
=====

```

### Interpretation des Schätzergebnisses:

– Produktionselastizität des Kapitals: 0.921 (19.9)

– Produktionselastizität der Arbeit:  $0.823 \pm 2 \cdot 0.14$

– 95 Prozent Konfidenzbereich:  $\hat{\beta} \pm 2 \cdot \hat{\sigma}_{\beta}$

– Skalenelelastizität:  $0.921 + 0.823$ , ökonomisch sinnvoll?

– Konstante: Skalierungsparameter, totale Faktorproduktivität.

– im 1. Quartal:  $-3.955084 - 0.075698 + \gamma \cdot t$

– im 2. Quartal:  $-3.955084 - 0.046199 + \gamma \cdot t$

– im 3. Quartal:  $-3.955084 - 0.000624 + \gamma \cdot t$

– im 4. Quartal:  $-3.955084 + \gamma \cdot t$

– Technischer Fortschritt:  $-0.2$  Prozent pro Quartal, ökonomisch sinnvoll?

## Erweiterte Schätzung der Produktionsfunktion

- *Arbeitszeit als Produktionsfaktor*
- *Kapitaleinsatz bereinigt um Auslastungsschwankungen*
- *technischer Fortschritt als Trend*

$$A = \bar{A} \cdot \exp(\gamma \cdot t + \gamma_2 \cdot t^2), \frac{\partial \ln A}{\partial t} = \gamma + 2 \cdot \gamma_2 \cdot t$$

=====

LS // Dependent Variable is LYT

Sample: 1960:1 1989:4

Included observations: 120

=====

Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
C	-4.525458	0.726587	-6.228375	0.0000
SEAS(1)	-0.069597	0.005229	-13.30894	0.0000
SEAS(2)	-0.035368	0.005449	-6.491212	0.0000
SEAS(3)	0.017540	0.005457	3.214035	0.0017
log(LT)+log(H)	0.618268	0.099434	6.217867	0.0000
log(K)+log(Q)	0.320979	0.050292	6.382301	0.0000
T	0.011083	0.001152	9.624822	0.0000
T^2	-4.15E-05	3.57E-06	-11.62725	0.0000

=====

R-squared	0.994971	Mean dependent var	5.589478
Adjusted R-squared	0.994657	S.D. dependent var	0.259055
S.E. of regression	0.018936	Akaike info criter	-7.869033
Sum squared resid	0.040160	Schwartz criterion	-7.683200
Log likelihood	309.8694	F-statistic	3165.661
Durbin-Watson stat	1.195576	Prob(F-statistic)	0.000000

=====

### Interpretation des Schätzergebnisses:

- *Skalenelastizität: 0.618+0.321*
- *Technischer Fortschritt: 1.1 – 2 · –0.00415 · t Prozent im Quartal.*