ulm university universität uulm

Universität Ulm | 89069 Ulm | Germany

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Prof. Dr. Werner Smolny
Institut für Wirtschaftspolitik

Ludwig-Erhard-Stiftungsprofessur
Institutsdirektor

Wintersemester 2010/2011

Produktionsfunktion und technischer Fortschritt

Literatur: *Mankiw, Kapitel 3.1, 3.2, Anhang zu Kapitel 3*
Smolny, W. (2000), Sources of productivity growth, Applied Economics 32, pp. 305-314

1.3 Das Konzept der Produktionsfunktion

Die Produktionsfunktion ist eine technische Relation zur Beschreibung des Zusammenhangs der Produktionsmöglichkeiten in Abhängigkeit der Einsatzmengen der Produktionsfaktoren.

Beispiel: Das Produktionspotential bestimmt sich über eine Produktionsfunktion

$$YP = YP(K, L, A) \tag{1}$$

in Abhängigkeit der Faktoreinsatzmengen Kapital und Arbeit. A ist ein Skalierungsparameter (totale Faktorproduktivität).

YP:	Produktionspotential,
K:	Kapitaleinsatz,
L:	Arbeitseinsatz bzw. Beschäftigung,
A:	Skalierungsparameter (totale Faktorproduktivität).

Helmholtzstr. 20, Raum E 05
Tel. 0731 50-24260, Fax -24262
http://www.uni-ulm.de/mawi/wirtschaftspolitik
Werner.Smolny@uni-ulm.de

Der Auslastungsgrad des Produktionspotentials Q ist definiert durch das Verhältnis von aktueller Produktion Y und dem Produktionspotential YP,

$$Q := \frac{Y}{YP} \tag{2}$$

Y:	aktuelle Produktion,
Q:	Auslastungsgrad des Produktionspotential

Wenn aufgrund zu geringer Nachfrage (zu hoher Kosten) weniger produziert wird als mit den Faktoreinsatzmengen möglich ist, dann ist der Auslastungsgrad des Produktionspotentials kleiner als 100 Prozent (Unterauslastung).

Unterscheidung: Wachstum $\Delta \ln YP$ und Konjunktur $\Delta \ln Q$

Die Cobb/Douglas Produktionsfunktion

Bei einer Cobb/Douglas Produktionsfunktion bestimmt sich das Produktionspotential als eine logarithmisch lineare Funktion der Faktoreinsatzmengen und der totalen Faktorproduktivität,

$$YP = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \tag{3}$$

oder in logarithmischer Schreibweise

$$\ln YP = \ln A + \alpha \cdot \ln K + (1 - \alpha) \cdot \ln L. \tag{4}$$

Die Eigenschaften der Cobb/Douglas Produktionsfunktion

Das maximal mögliche Durchschnittsprodukt oder die potentielle Produktivität der Produktionsfaktoren berechnet sich als:

$$\text{Arbeitsproduktivität:} \quad \frac{YP}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = A \cdot k^{\alpha} \tag{5}$$

$$\text{Kapitalproduktivität:} \quad \frac{YP}{K} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} = A \cdot k^{\alpha-1} \tag{6}$$

Die Faktorproduktivitäten bestimmen sich also aus der totalen Faktorproduktivität A, der Kapitalintensität $k = K/L$ und den Koeffizienten der Produktionsfunktion.

Hinweis:

Die aktuelle Produktivität der Produktionsfaktoren Y/L bzw. Y/K bestimmt sich durch Multiplikation der potentiellen Produktivität mit dem Auslastungsgrad Q.

Die $\boxed{\text{Grenzprodukte}}$ der Produktionsfaktoren ergeben sich durch Ableitung der Produktionfunktion nach den Faktoreinsatzmengen

Grenzprodukt der Arbeit:

$$\frac{\partial YP}{\partial L} = A \cdot (1-\alpha) \cdot K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha} = A \cdot (1-\alpha) \cdot k^{\alpha} \tag{7}$$

Grenzprodukt des Kapitals:

$$\frac{\partial YP}{\partial K} = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} = A \cdot \alpha \cdot k^{\alpha-1} \tag{8}$$

Das Grenzprodukt gibt an, um wieviel Einheiten die Produktion bei einer marginalen Ausweitung der Faktoreinsatzmengen steigen kann.

Beispiel:

Bei der Einstellung eines zusätzlichen Beschäftigten kann die Jahresproduktion um real 50 000 € steigen.

Durch eine neue Maschine im Wert von 1 Million € können pro Jahr zusätzlich Produkte im Wert von 500 000 € produziert werden.

Bei der Cobb/Douglas Produktionsfunktion ist das Grenzprodukt der Faktoren durch das Durchschnittsprodukt und die Koeffizienten der Produktionsfunktion bestimmt.

$$\frac{\partial YP}{\partial L} = (1-\alpha) \cdot \frac{YP}{L} \tag{9}$$

$$\frac{\partial YP}{\partial K} = \alpha \cdot \frac{YP}{K} \tag{10}$$

Schließlich können die $\boxed{\text{Produktionselastizitäten}}$ der Produktionsfaktoren berechnet werden.

Sie geben an, um wieviel Prozent die Produktion bei einer prozentualen Ausweitung der Produktionsfaktoren gesteigert werden kann.

Produktionselastizität der Arbeit:

$$\frac{\partial YP/YP}{\partial L/L} = \frac{\partial YP}{\partial L} \cdot \frac{L}{YP} = 1 - \alpha \tag{11}$$

Produktionselastizität des Kapitals:

$$\frac{\partial YP/YP}{\partial K/K} = \frac{\partial YP}{\partial K} \cdot \frac{K}{YP} = \alpha \tag{12}$$

Beispiel:

Wenn der Kapitalstock um ein Prozent ausgedehnt wird, steigt die potentielle Produktion um α Prozent.

Die Koeffizienten der Cobb/Douglas Produktionsfunktion entsprechen also den Produktionselastizitäten der Produktionsfaktoren.

Die Produktionselastizitäten sind damit unabhängig von den Faktoreinsatzmengen und von der Kapitalintensität.

$\boxed{\text{Stichworte:}}$

Grenzprodukt, Produktionselastizität und Einkommensverteilung

$\rightarrow$ bei Grenzproduktivitätsentlohnung bestimmt α die Einkommensverteilung

Wenn der Einsatz beider Produktionsfaktoren, Arbeit und Kapital, um einen bestimmten Prozentsatz ausgedehnt wird, steigt auch das Produktionspotential um diesen Prozentsatz.

Diese Eigenschaft wird als lineare Homogenität
der Produktionsfunktion bezeichnet.

Wenn die Summe der Produktionselastizitäten größer ist als 1, spricht man von steigenden Skalenerträgen.
In diesem Fall steigt die Produktivität mit der produzierten Menge (Vorteile der Massenproduktion).

Umgekehrt spricht man von sinkenden Skalenerträgen in dem Fall, daß die Produktivität mit der produzierten Menge abnimmt.

Insbesondere der erste Fall ist sehr wichtig bei der Wachstumsanalyse und für die Analyse der Wettbewerbsverhältnisse:

steigende Skalenerträge $\longrightarrow$ *Monopolisierung*

1.4 Die Messung des technischen Fortschritts

Die totale Faktorproduktivität kann aus dem Produktionspotential und den Faktoreinsatzmengen berechnet werden.

$$\ln A = \ln YP - \alpha \cdot \ln K - (1 - \alpha) \cdot \ln L \qquad (13)$$

A bestimmt, wieviel mit einem gegebenen Kapitalstock und gegebenen Beschäftigten produziert werden kann.

Veränderungen von A werden als technischer Fortschritt bezeichnet.

$$\Delta \ln A = \Delta \ln YP - \alpha \cdot \Delta \ln K - (1 - \alpha) \cdot \Delta \ln L \qquad (14)$$

$\alpha \cdot \Delta \ln K$ ist der Beitrag des Kapitals zum Wachstum des Produktionspotentials,

$(1 - \alpha) \cdot \Delta \ln L$ ist der Beitrag der Arbeit.

Die Rate des technischen Fortschritts wird hier als Residuum (Rest) berechnet; A steigt durch technischen Fortschritt:
$\Delta \ln A$: Rate des technischen Fortschritts

Konstanter technischer Fortschritt kann durch eine Exponentialfunktion für A beschrieben werden.

$$A_t = \overline{A} \cdot \exp(\gamma \cdot t) \qquad (15)$$

mit γ als der Rate des technischen Fortschritts

$$\frac{\partial A / \partial t}{A} = \frac{\partial \ln A}{\partial t} = \gamma \qquad (16)$$

γ gibt an, um wieviel das Produktionspotential in jeder Periode steigt, ohne daß der Kapitaleinsatz oder die Beschäftigung verändert werden müssen.

Hinweis: Technischer Fortschritt ist nicht konstant, sondern wird durch Forschung und Entwicklung, Innovationen, Produktivitätsspillovers . . . bestimmt.

Die folgenden Schaubilder zeigen die Entwicklung der Faktoreinsatzmengen und der Produktivität für die Bundesrepublik Deutschland (Westdeutschland) 1960-1998.

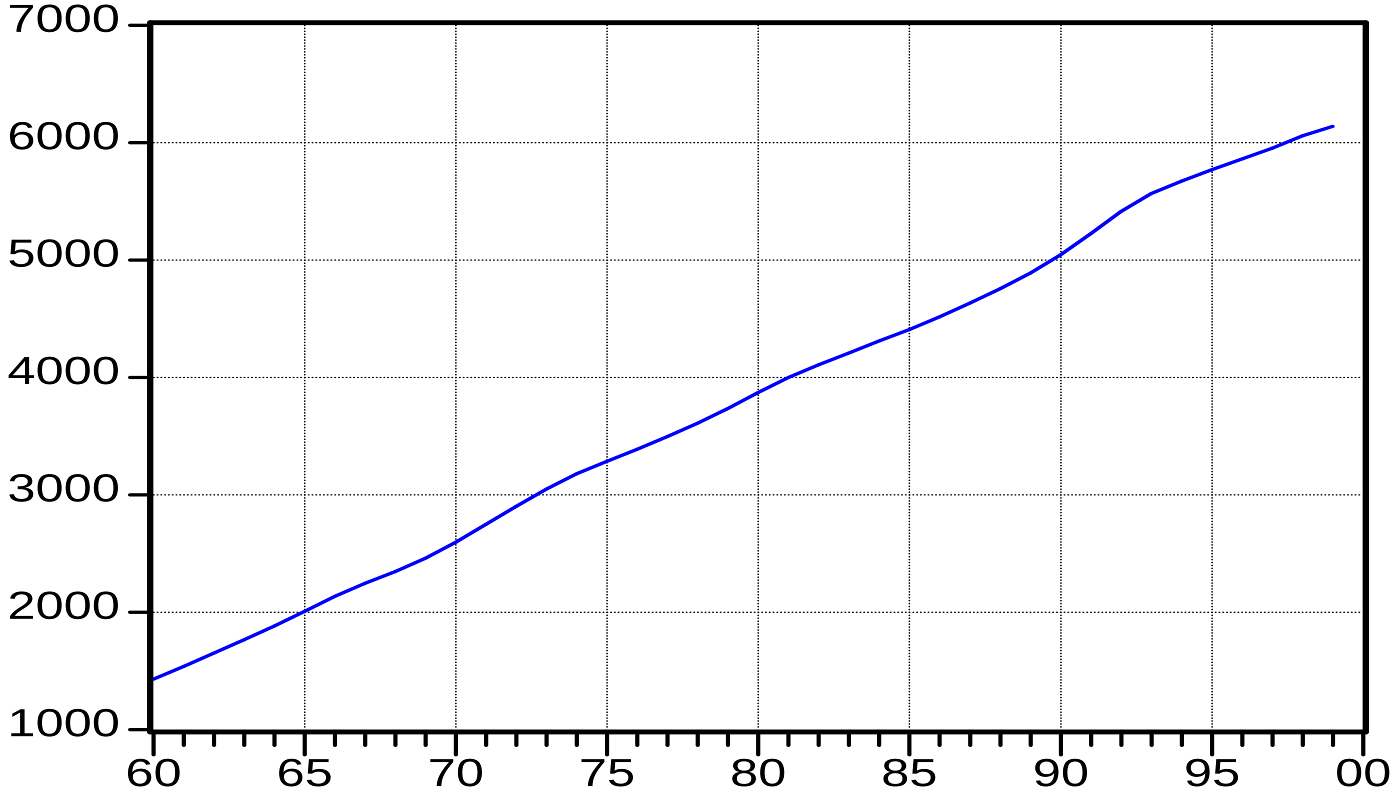
Quelle:

Volkswirtschaftliche Gesamtrechnung des Statistischen Bundesamtes, ifo Institut für Wirtschaftsforschung.

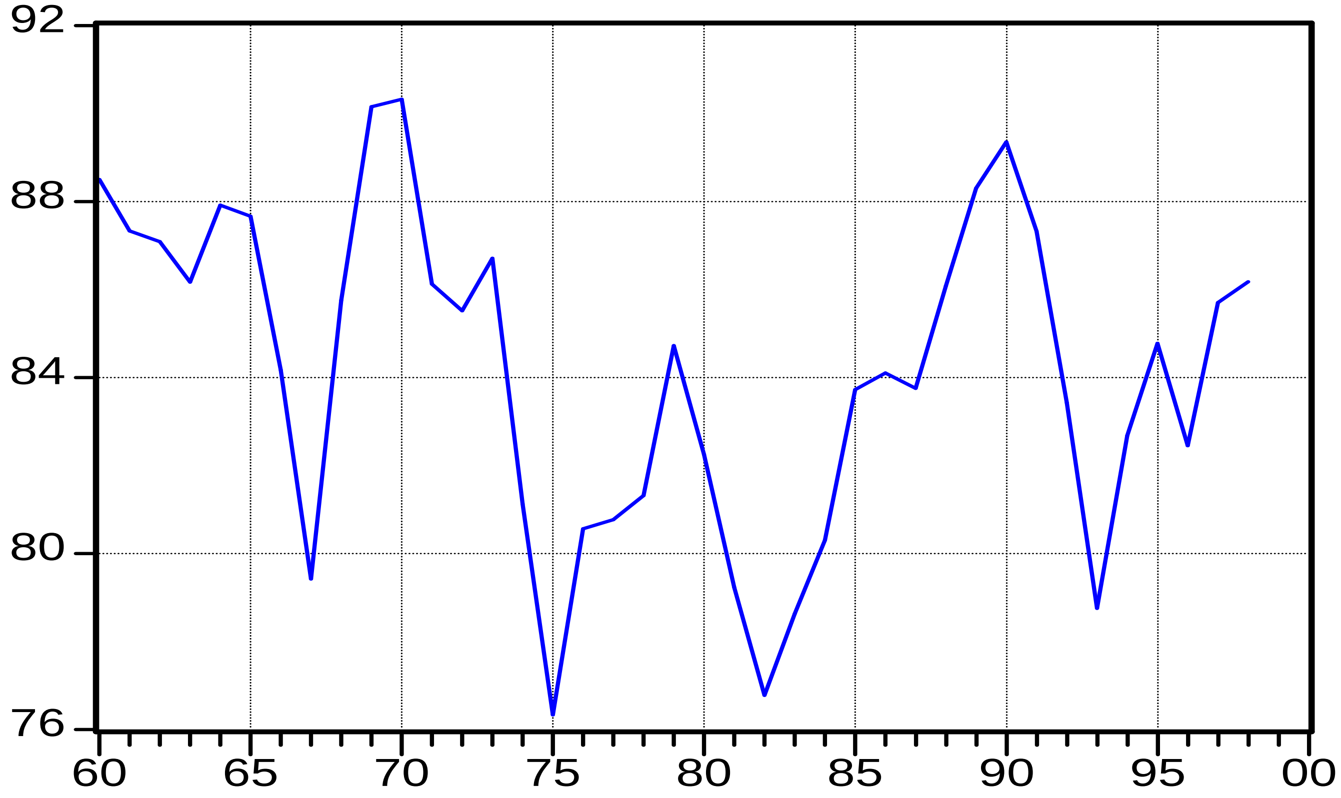
Die Beiträge der Faktoren zum Wirtschaftswachstum und die Entwicklung der totalen Faktorproduktivität wurden anhand der obigen Gleichungen berechnet.

	1961-1998	1961-1973	1974-1998
$\Delta \ln Y$	2.8	4.2	2.0
$\Delta \ln K$	3.8	5.8	2.7
$\Delta \ln Q$	0.1	-0.2	0.0
$\Delta \ln L$	0.2	0.3	0.1
$\Delta \ln h$	-0.8	-1.1	-0.7
$(1-\alpha) \cdot \Delta \ln(L \cdot h)$	-0.4	-0.5	-0.4
$\alpha \cdot \Delta \ln(K \cdot Q)$	1.2	1.9	0.9
$\Delta \ln A$	2.0	2.9	1.5

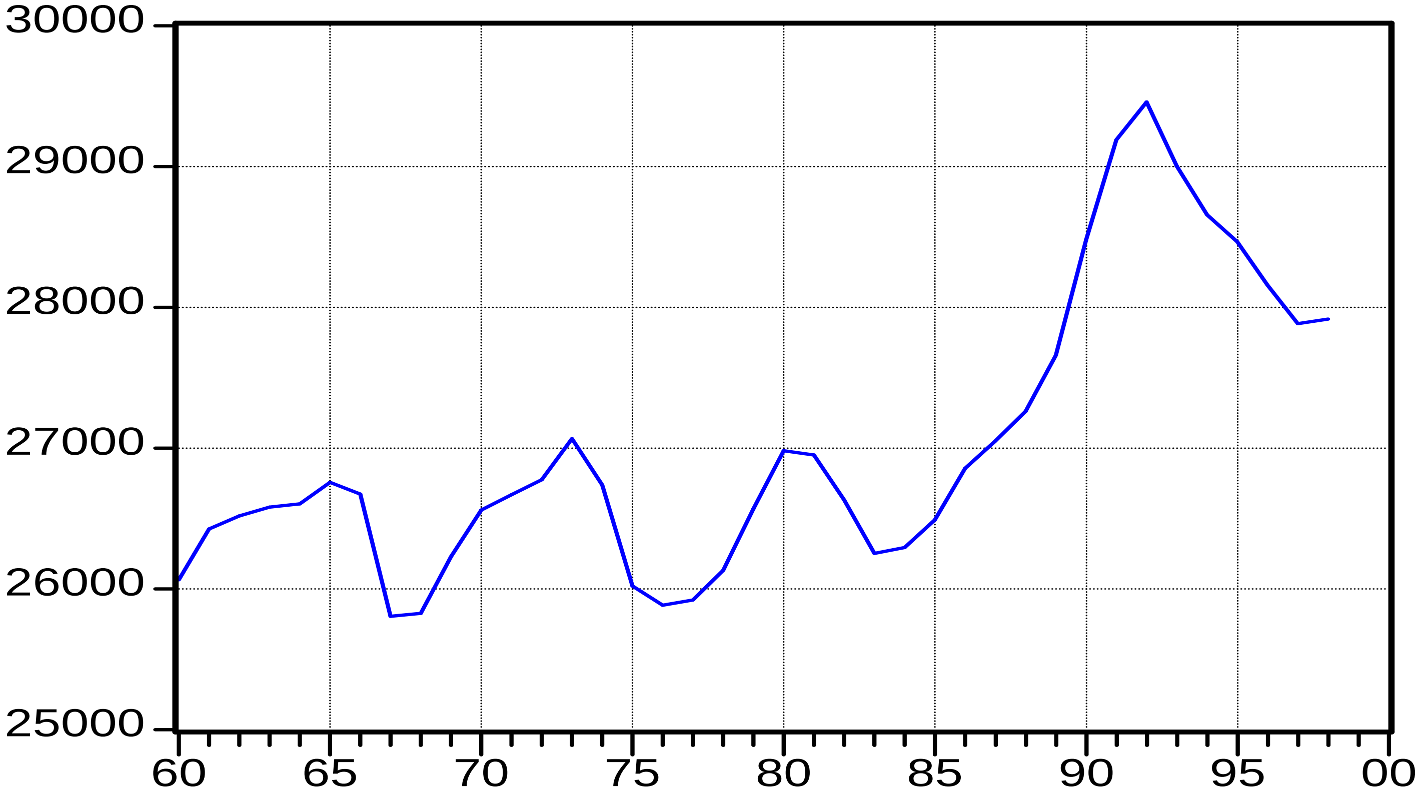
Bruttoanlagevermögen K *Westdeutschland, in Preisen von 1991, in Mrd. DM*



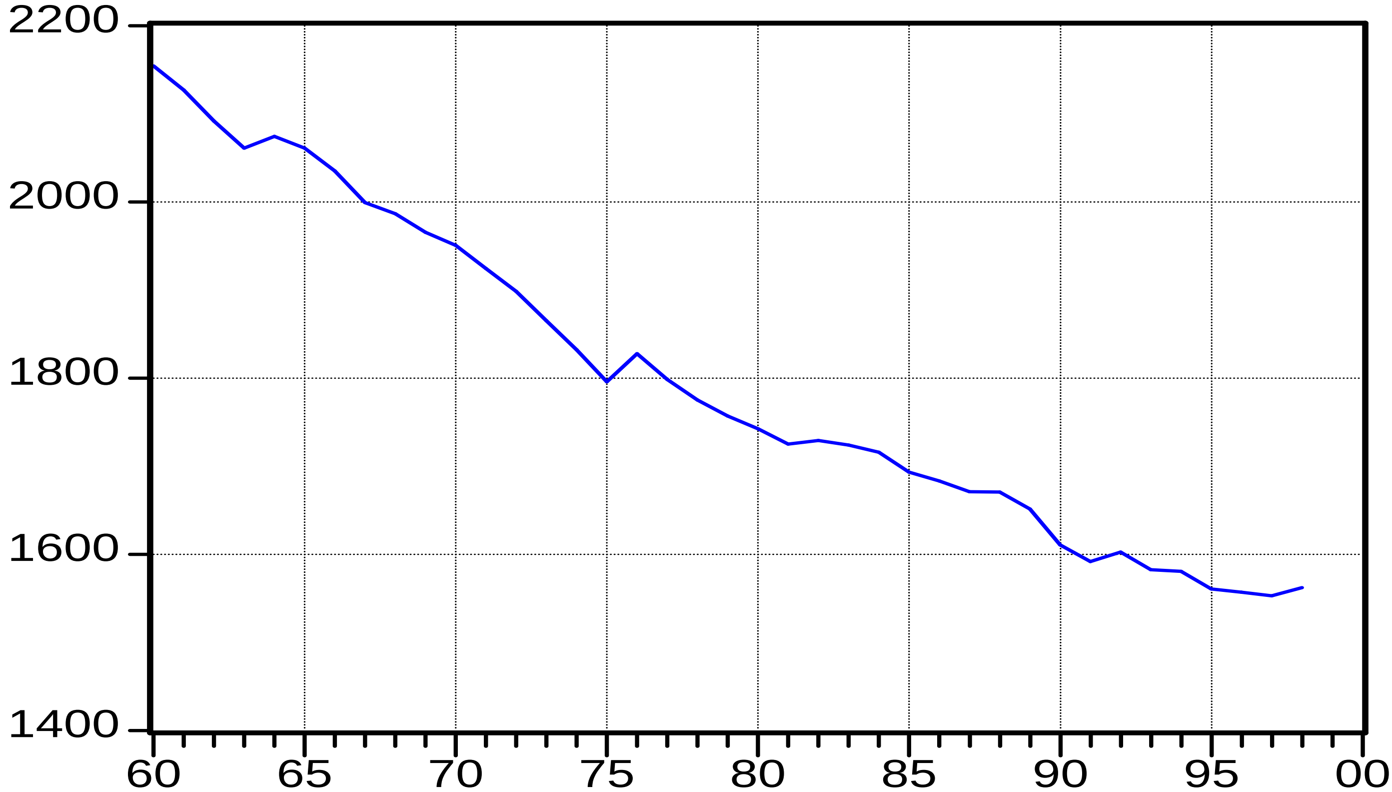
Kapazitätsauslastungsgrad Q *Industrie, Westdeutschland, in %*



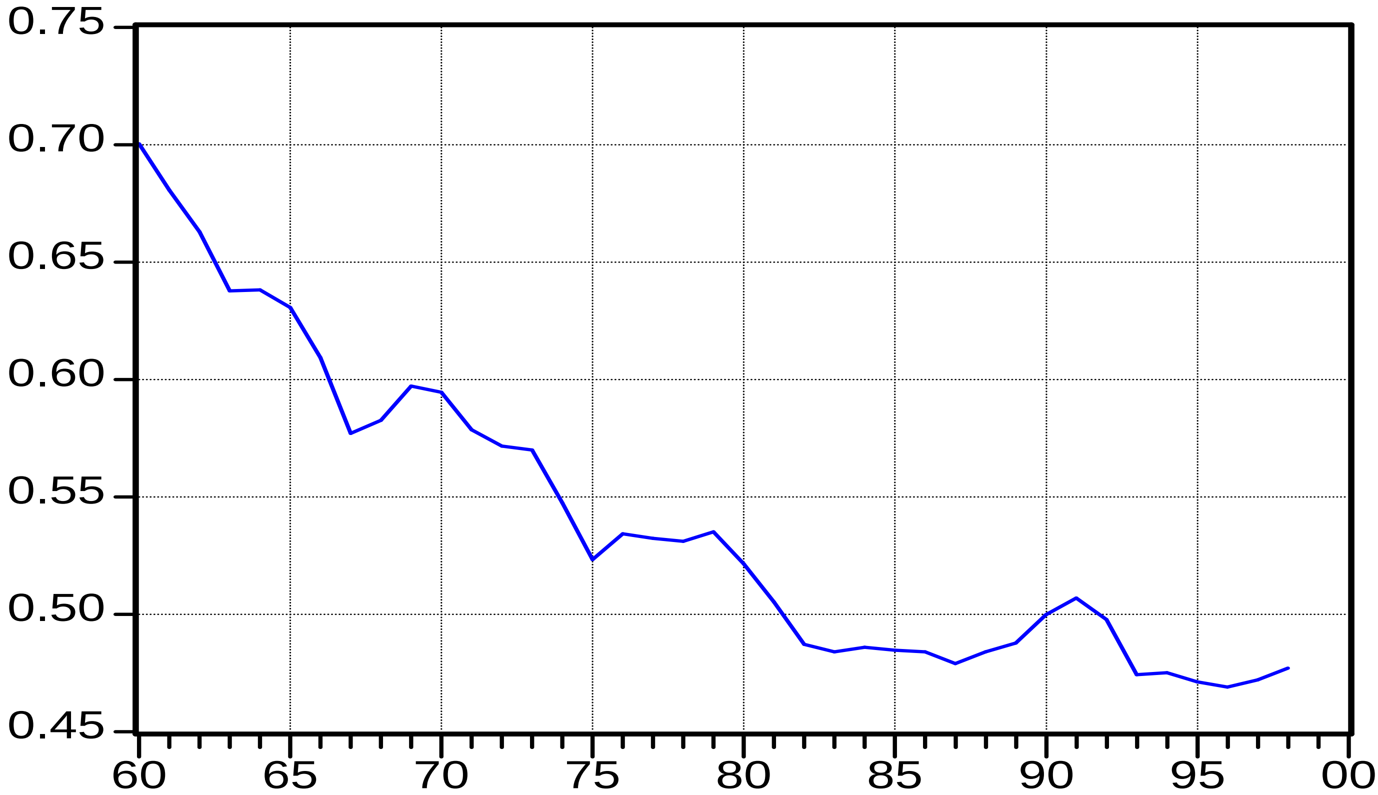
Zahl der Erwerbstätigen L *Westdeutschland, in 1000*



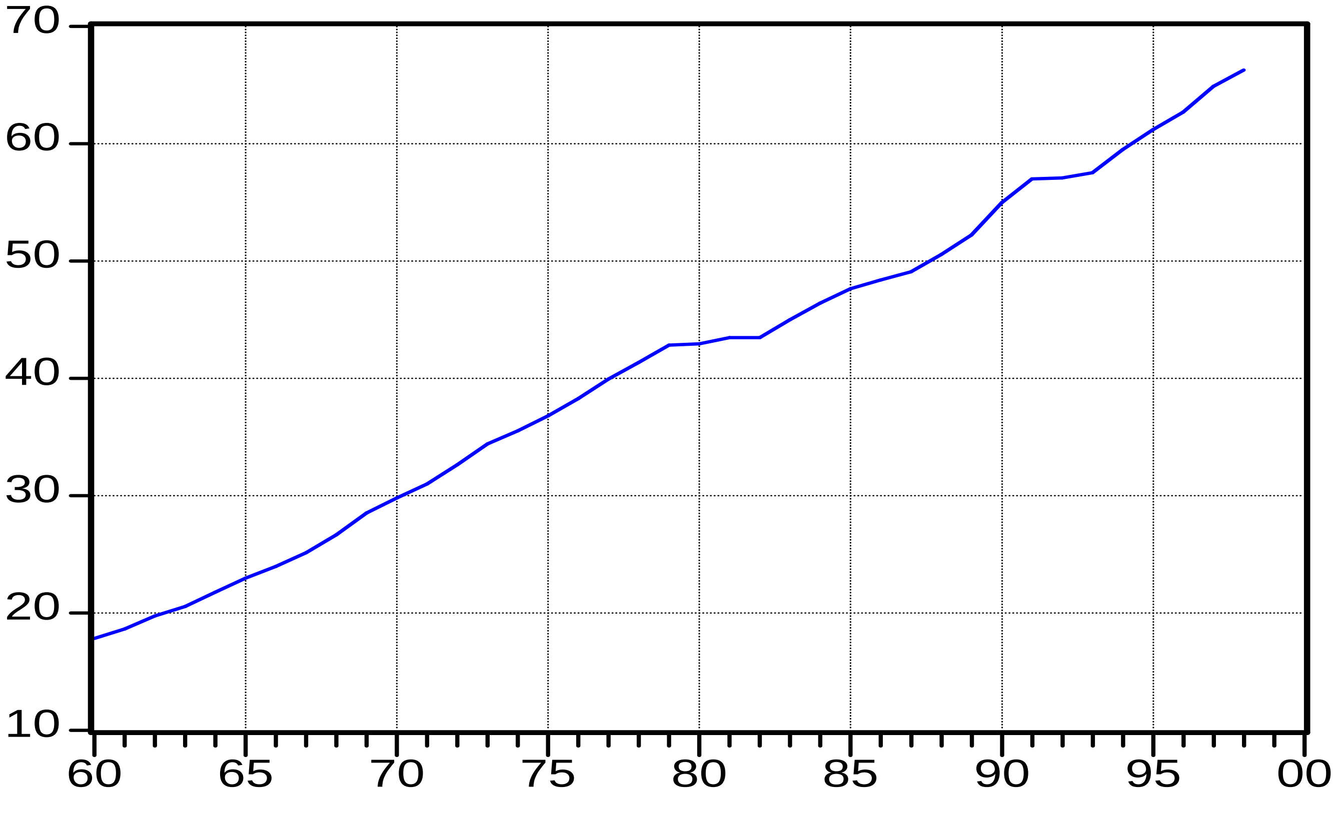
Arbeitszeit h *pro Erwerbstätigen, Westdeutschland, in Stunden pro Jahr*



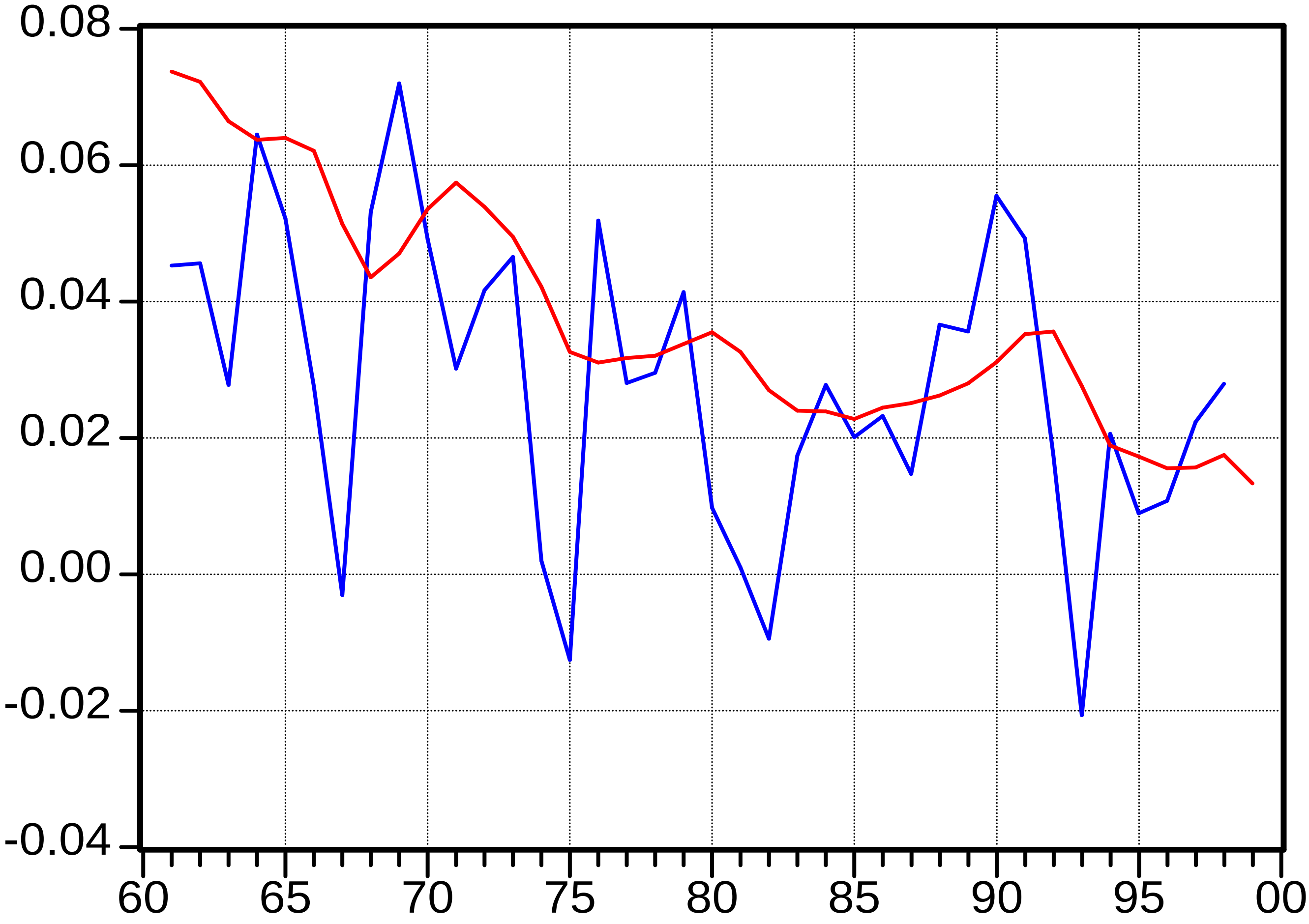
Kapitalproduktivität Y/K *Westdeutschland*



Arbeitsproduktivität $Y/(L \cdot h)$ *Westdeutschland, pro Stunde, in DM (1991)*



Wirtschaftswachstum und Kapitalakkumulation

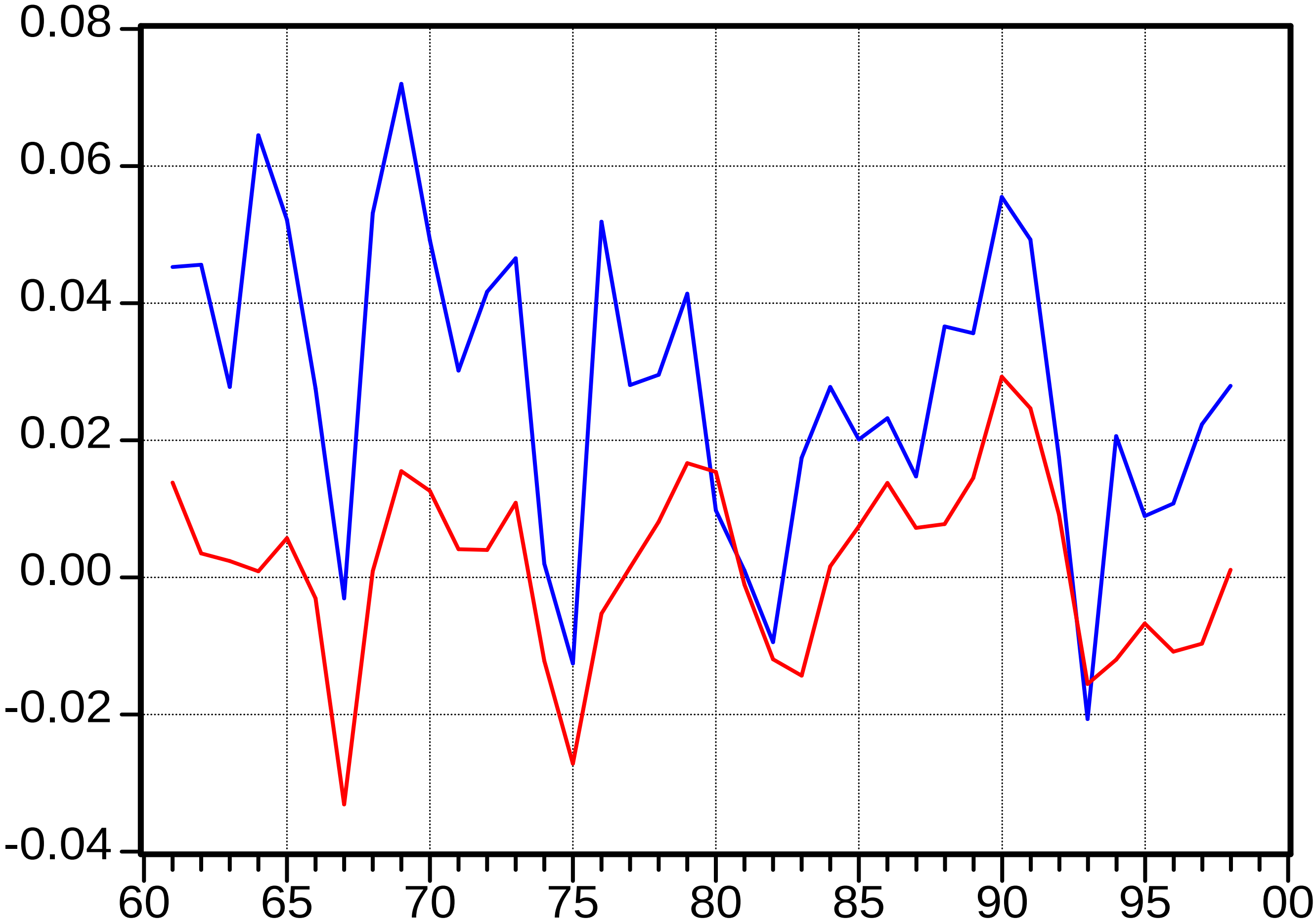


– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– relative Veränderung des Kapitalstocks, $\Delta \ln K$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen

Wirtschaftswachstum und Beschäftigung

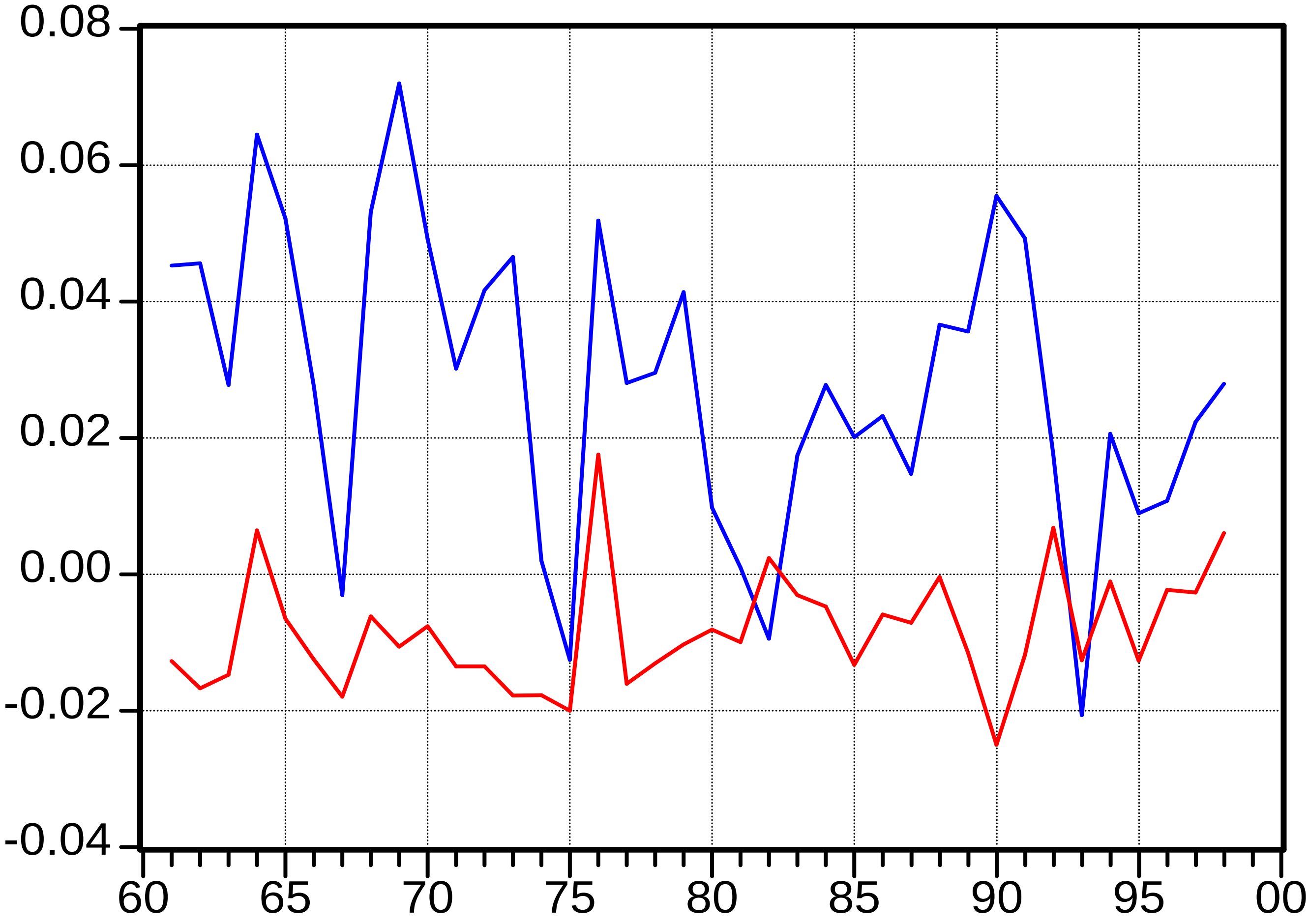


– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– relative Veränderung der Zahl der Erwerbstätigen, $\Delta \ln L$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen

Wirtschaftswachstum und Arbeitszeit

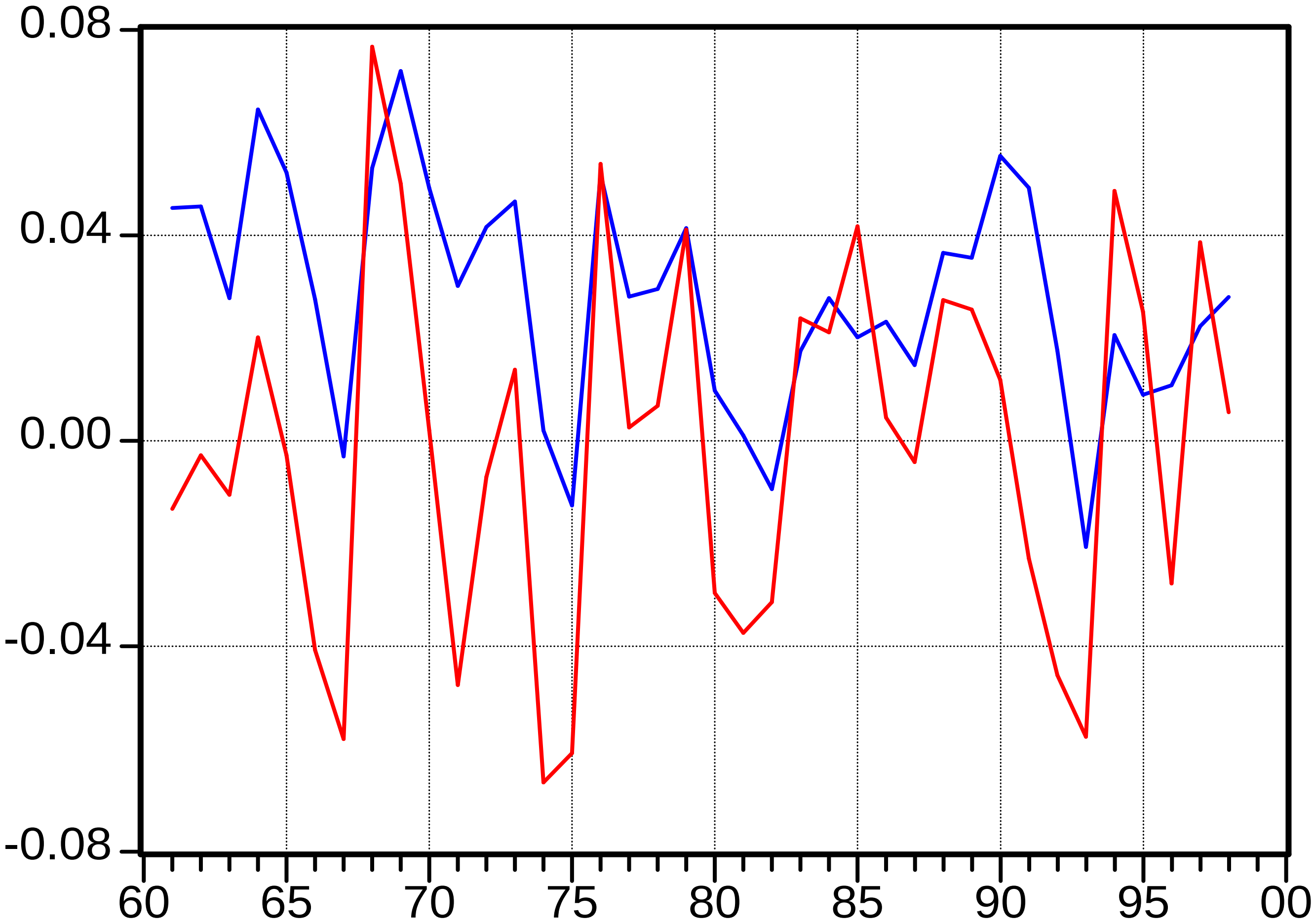


– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– relative Veränderung der Arbeitszeit pro Erwerbstätigen, $\Delta \ln H$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen

Wirtschaftswachstum und Kapazitätsauslastung

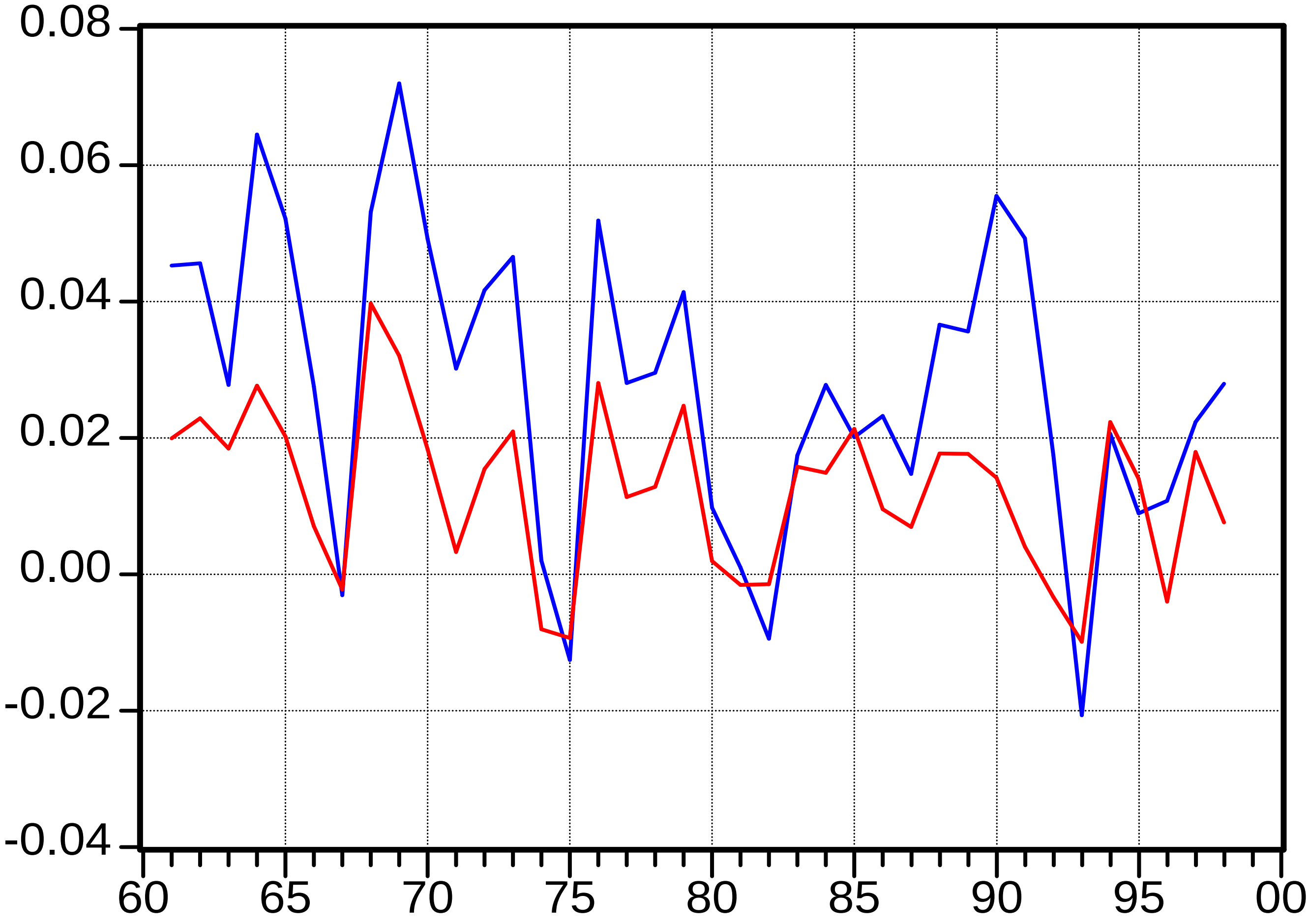


– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– relative Veränderung des Auslastungsgrades der Kapazitäten, $\Delta \ln Q$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen

Der Beitrag des Kapitals zum Wirtschaftswachstum

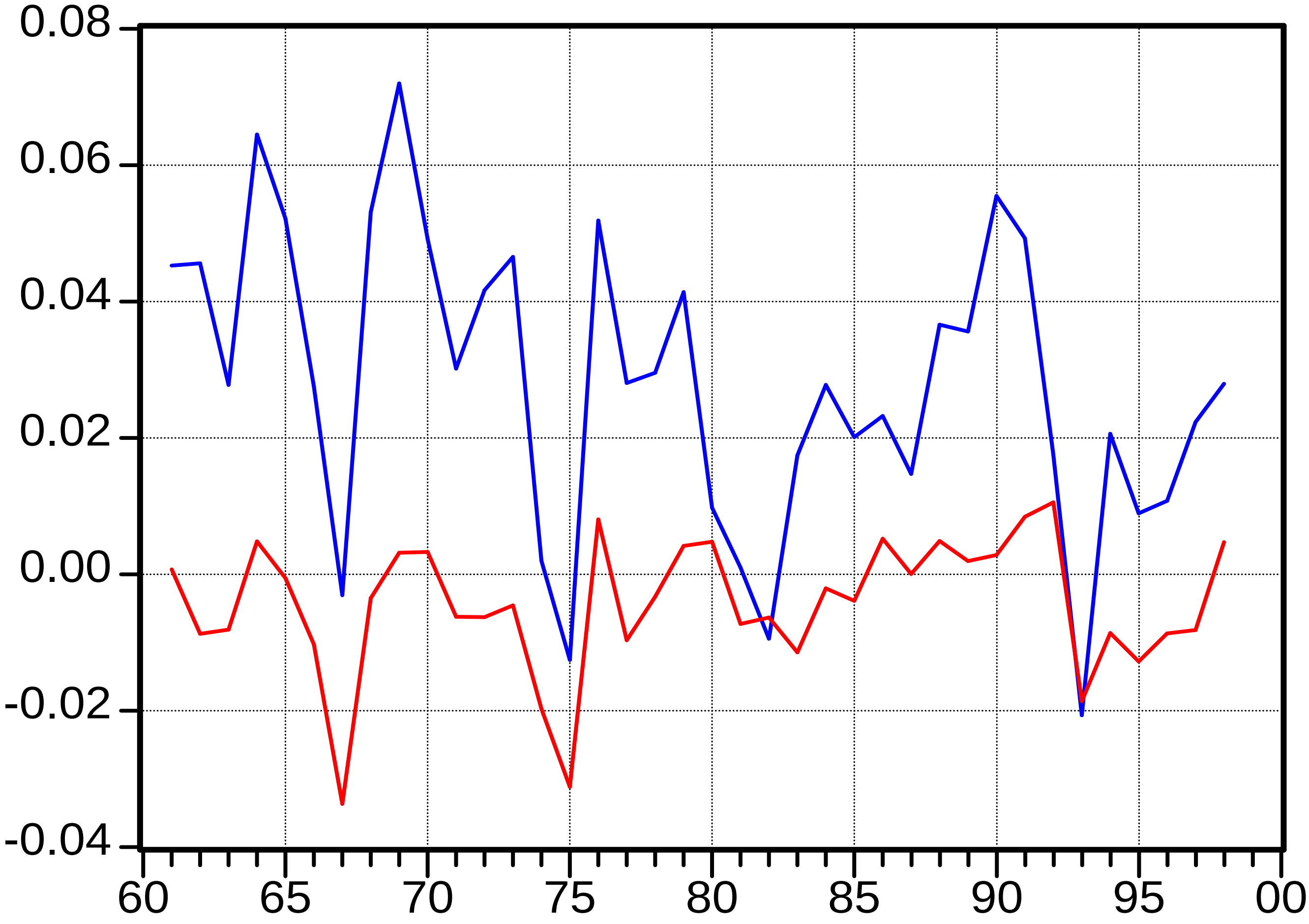


– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– der Beitrag des Kapitals, $\alpha \cdot \Delta \ln(K \cdot Q)$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,
$\alpha = 1/3$

Der Beitrag der Arbeit zum Wirtschaftswachstum

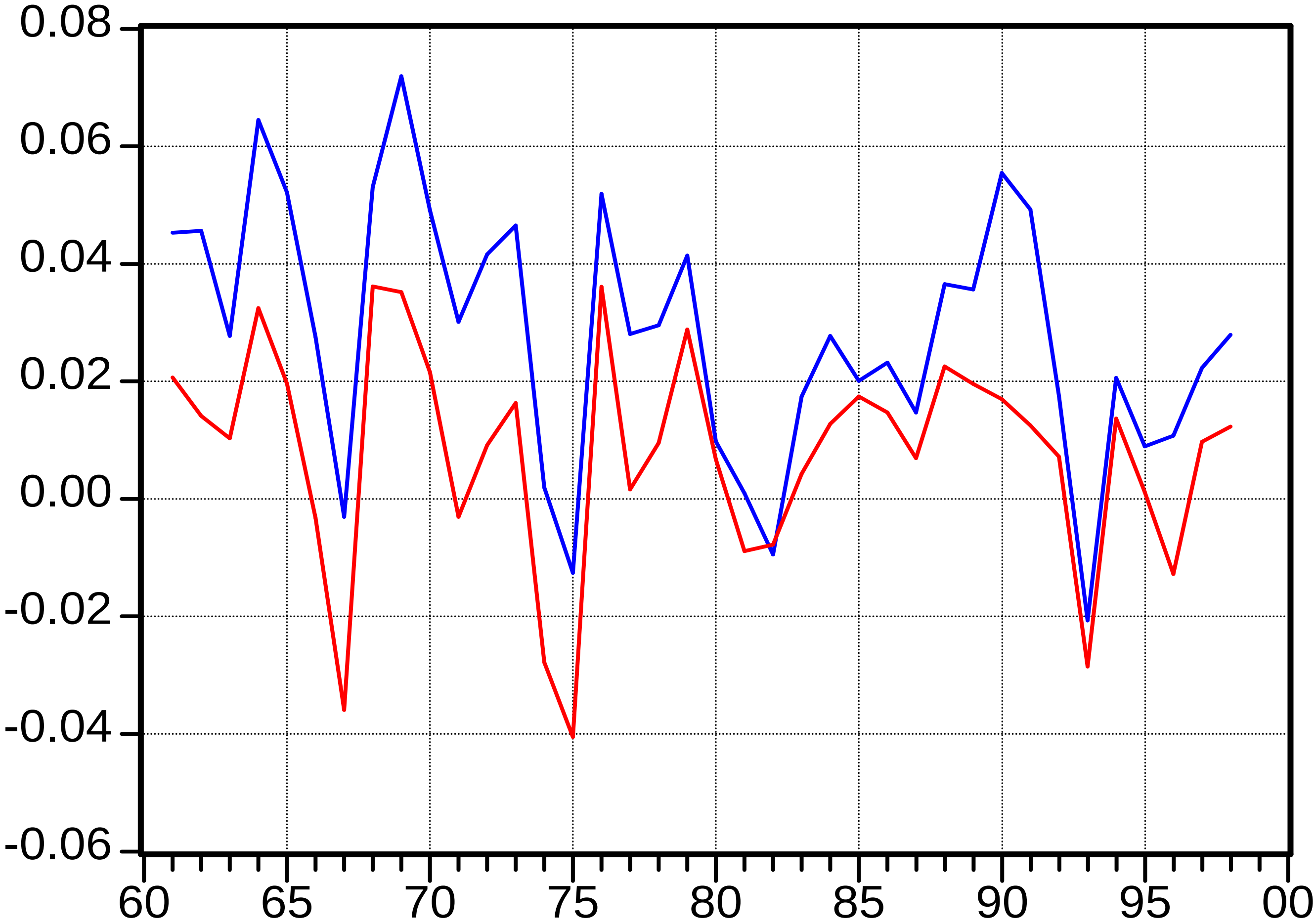


– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– der Beitrag der Arbeit, $(1-\alpha) \cdot \Delta \ln(L \cdot h)$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,
$\alpha = 1/3$

Der Beitrag von Arbeit und Kapital zum Wirtschaftswachstum



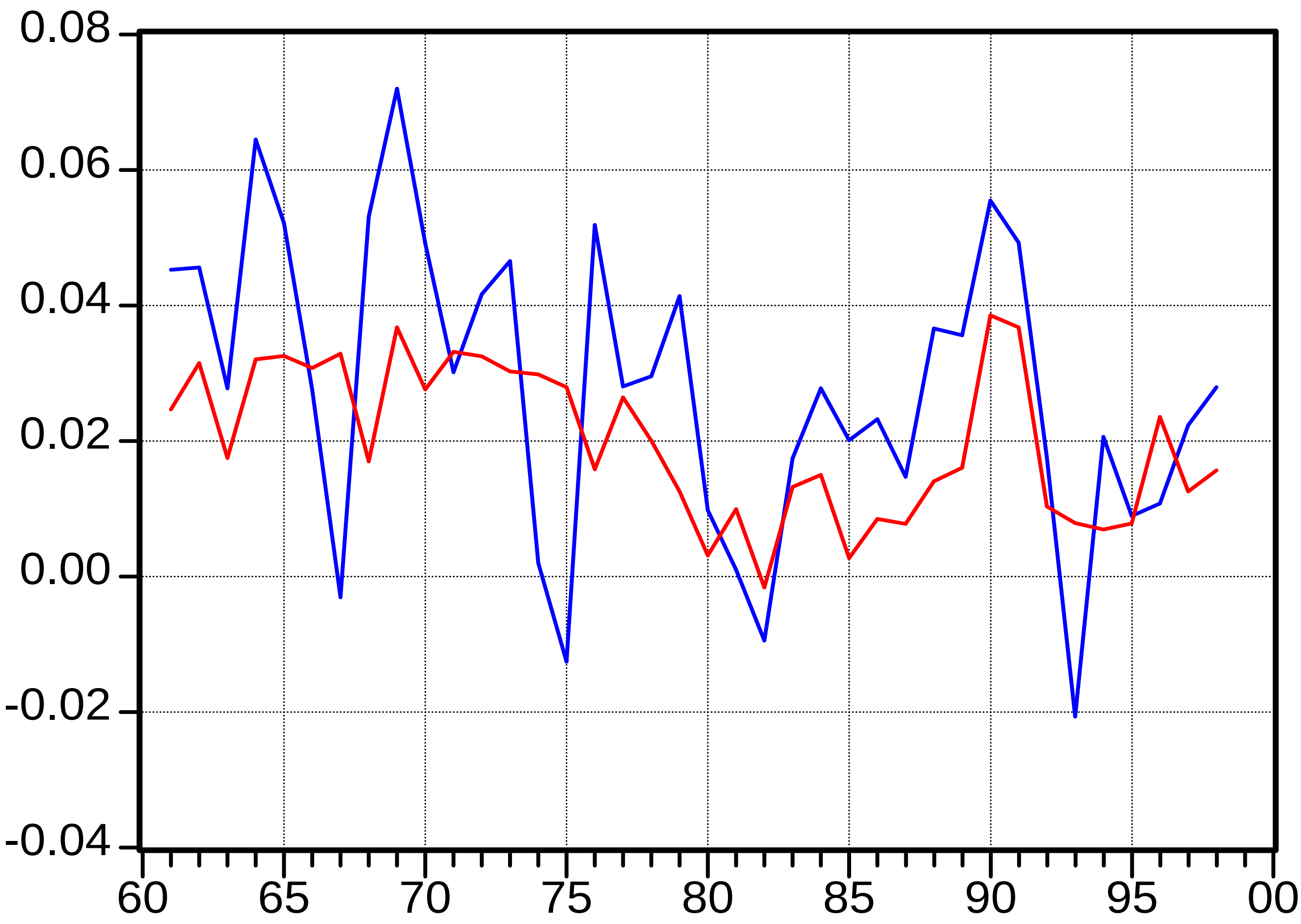
– Wirtschaftswachstum, $\Delta \ln Y$

– der Beitrag der Arbeit und des Kapitals,

$$(1-\alpha) \cdot \Delta \ln(L \cdot h) + \alpha \cdot \Delta \ln(K \cdot Q)$$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,
$\alpha = 1/3$

Der unerklärte Rest



– Wirtschaftswachstum $\Delta \ln Y$

– Veränderungen der totalen Faktorproduktivität,

$$\Delta \ln A = \Delta \ln Y - (1-\alpha) \cdot \Delta \ln(L \cdot h) - \alpha \cdot \Delta \ln(K \cdot Q)$$

Daten für Westdeutschland, real, d.h. zu Preisen von 1991,
Veränderungsraten berechnet als Differenzen von Logarithmen,
$\alpha = 1/3$.