ulm university universität ulm

Universität Ulm | 89069 Ulm | Germany

Dipl.-WiWi Christian Peukert
Institut für Wirtschaftspolitik

Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Ludwig-Erhard-Stiftungsprofessur

Wintersemester 2010/11

Übung 4

Produktivitätskonvergenz in Ostdeutschland II

---

1 Die CES Produktionsfunktion

Grenzprodukte, Grenzrate der Substitution, Substitutionselastizität, Arbeitsproduktivität

2 Erweiterung und empirische Spezifikation

Auslastung der Arbeit, Anpassung der totalen Faktorproduktivität

3 Ergebnisse

Substitutionselastizität, negativer Einfluss der Arbeitsauslastung, Rate des technologischen Fortschritts in Ostdeutschland

4 Herleitungen

Literatur:

Frenkel, M./Hemmer, H-R. (1999), Grundlagen der Wachstumstheorie, Vahlen, München, S. 27–37.

Smolny, W. (2010), Cyclical adjustment, capital-labor substitution and total factor productivity convergence – East Germany after unification

Helmholtzstr. 20, Raum E 02
Tel. 0731 50-24265, Fax -24262

http://www.uni-ulm.de/wipo
Christian.Peukert@uni-ulm.de

1 Die CES Produktionsfunktion

Eine Produktionsfunktion mit konstanter Substiutionselastizität (constant elasticity of substitution) kann geschrieben werden als:

$$YP = \theta \cdot [\delta \cdot L^{-\rho} + (1-\delta) \cdot K^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}},$$

wobei YP das Produktionspotenzial angibt, mit den Faktoren Kapital K und Arbeit L. Ferner gelte $\rho = \frac{1}{\sigma} - 1$ wobei mit σ die Substitutionselastizität, mit δ ein Verteilungsparameter und mit θ die totale Faktorproduktivität bezeichnet ist.

Eine solche Produktionsfunktion findet bei vielen empirischen Analysen ihre Anwendung.

1.1 Grenzprodukte

Das Grenzprodukt von Arbeit und Kapital lässt sich schreiben als

$$\frac{\partial YP}{\partial L} = \theta^{-\rho} \cdot \delta \cdot \left(\frac{YP}{L}\right)^{1+\rho}$$
$$\frac{\partial YP}{\partial K} = \theta^{-\rho} \cdot (1-\delta) \cdot \left(\frac{YP}{K}\right)^{1+\rho}$$

1.2 Grenzrate der Substitution

Die Grenzrate der Substitution ist dann als

$$\frac{\partial YP}{\partial L} / \frac{\partial YP}{\partial K} = \frac{\delta}{1-\delta} \cdot k^{1+\rho}$$

mit $k = K/L$ gegeben. Sie gibt an, um wieviele Einheiten die Einsatzmenge des Faktors Arbeit L erhöht (verringert) werden muss, wenn der Faktor Kapital um eine infinitesimal kleine Einheit reduziert (vermehrt) wird.

1.3 Substitutionselastizität

Die Substitutionselastizität σ ist ein Maß für die proportionale Veränderung der Kapitalintensität k relativ zu einer proportionalen Veränderung der Grenzrate der Substitution, d.h.

$$\sigma = \frac{d(k)}{k} / \frac{d(GdS)}{GdS} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Man kann zeigen, dass die Cobb-Douglas Produktionsfunktion ein Spezialfall der CES Produktionsfunktion mit $\sigma = 1$ ist.

1.4 Arbeitsproduktivität

Die potentielle Arbeitsproduktivität bei Vollbeschäftigung können wir mit Hilfe des Grenzprodukts der Arbeit bestimmen, wobei wir $\frac{\partial YP}{\partial L}$ nach $\frac{YP}{L}$ auflösen:

$$\frac{YP}{L} = \left(\frac{\partial YP}{\partial L} \cdot \frac{1}{\theta^{-\rho} \cdot \delta} \right)^{\frac{1}{1+\rho}}.$$

Eine detaillierte Herleitung finden Sie im Abschnitt 4.

2 Erweiterung und empirische Spezifikation

Die auf Basis der CES Produktionsfunktion bestimmte Arbeitsproduktivität ist der Ausgangspunkt für eine empirische Analyse der Produktivitätsanpassung in Ostdeutschland. Zunächst logarithmieren wir $\frac{YP}{L}$ und ersetzen $\frac{1}{1+\rho} = \sigma$:

$$\ln YP/L = \sigma \cdot \left(\ln \left(\frac{\partial YP}{\partial L} \right) + \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) \cdot \ln \theta - \ln \delta \right).$$

Schließlich nehmen wir gewinnmaximierende Unternehmen mit Grenzproduktiviätsentlohnung an ($\frac{\partial YP}{\partial L} = \frac{w}{p}$), so dass gilt

$$\ln YP/L = \sigma \cdot \ln (w/p) + (1 - \sigma) \cdot \ln \theta - \sigma \cdot \ln \delta$$

wobei w den nominalen Lohnsatz und p das Preisniveau bezeichnet.

2.1 Auslastung der Arbeit

Der Vereinigungsprozess wurde von einem starkem Nachfragerückgang begleitet. Zudem fand keine schnelle Angleichung der Beschäftigung statt (Kündigungsschutz, Kurzarbeit, etc.). Deshalb lag die gemessene Arbeitsproduktivität unterhalb des Produktivitätspotential. Formal ausgedrückt,

$$\ln Y/L = \ln YP/L + \ln U$$

wobei Y/L den realen Output pro Beschäftigtem und $U \leq 1$ den Ausnutzungsgrad des Arbeitskräftepotentials angibt.

$$\ln Y/L = \sigma \cdot \ln (w/p) + (1 - \sigma) \cdot \ln \theta - \sigma \cdot \ln \delta + \ln U.$$

Daraus leitet sich schließlich das erste empirische Modell ab, das wir als

$$\ln Y_t/L_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln (w_t/p_t) + \beta_2 \cdot \ln \theta_t + \beta_3 \cdot \ln U_t + \varepsilon_t, \tag{1}$$

mit $\beta_0 = -\sigma \cdot \ln \delta$, $\beta_1 = \sigma$, $\beta_2 = 1 - \sigma$ schreiben können.

Die totale Faktorproduktivität approximieren wir mit einem quadratischen Zeittrend, so dass $\theta_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot t + \gamma_2 \cdot t^2$. Wir haben damit zwei Determinanten des realen Produktivitätswachstums abgeleitet. Zunächst den Einfluss von Reallöhnen mittels Subsitution von Arbeit und Kapital, schließlich die Veränderung des Auslastungsgrads der Arbeit im Zusammenhang mit Nachfrageschocks. Wir messen $\ln U_t$ mit zwei Indikatoren: Anteil der Arbeitnehmer in arbeitsmarktpolitischen Maßnahmen an den Gesamtbeschäftigten und Anteil der Kurzarbeiter an den Gesamtbeschäftigten.

2.2 Zusätzliche Spezifikationen

Für eine Variante von Gleichung (1) bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung Differenzen, so dass $\Delta Y_t/L_t = \ldots$. Dadurch können wir Determinanten des Produktivitätswachstums – eine eher kurzfristige Betrachtung – schätzen.

In einer weiteren Spezifikation setzen wir für $\ln Y_t/L_t$ und $\ln U_t$ relative Werte ein, so dass

$$\ln x_{i,t}^{d} = \ln x_{i,t} - \ln \overline{x}_{t}^{west}.$$

$\ln x_{i,t}^{d}$ ist also die logarithmierte Differenz des ostdeutschen Bundeslandes i zum westdeutschen Durchschnittswert zum Zeitpunkt t. Dadurch können wir die Daten um einen gemeinsamen westdeutschen Trend bereinigen.

2.3 Produktivitätsanpassung

Das Wachstum der totalen Faktorproduktivität stellt eine weitere Komponente der Produkivitätsanpassung in Ostdeutschland dar. Ostdeutsche Unternehmen hatten vor 1990 weniger effiziente Technologien zur Verfügung, da sie kaum Möglichkeiten hatten Hochtechnologiekapital zu importieren. Durch die Vereinigung und die damit verbundenen Subventionen kam es zu einem großen Zufluss von Direktinvestitionen, vornehmlich aus Westdeutschland. Weil westdeutsche Unternehmen Zugang zu internationaler Toptechnologie hatten und sehr produktiv waren, erwarteten vielen Ökonomen eine rasche Anpassung der ostdeutschen Produktivität an das westdeutsche Niveau. Formal kann man diesen Prozess der technologischen Diffusion als

$$\Delta \ln \theta_t = \lambda \cdot \ln(\theta_{t-1}/\theta_{t-1}^{w}) + \epsilon_t$$

ausdrücken: das Wachstum der totalen Faktorproduktivität in Ostdeutschland hängt positiv vom technologischen Abstand zu Westdeutschland ab. Damit können wir nun zusätzlich ein Anpassungsmodell schätzen, gegeben als

$$\begin{aligned} \Delta \ln Y_t/L_t = & \beta_0 + \beta_1 \cdot \Delta \ln (w_t/p_t) + \\ & \beta_2 \cdot (\Delta \ln \theta_t + \lambda \cdot \ln(\theta_t/\theta_t^{w})) + \beta_4 \cdot \Delta \ln U_t + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{2}$$

3 Ergebnisse

Die ersten beiden Spalten der folgenden Tabelle beziehen sich auf die logarithmierte Niveauschätzung, also eine Spezifikation wie in Gleichung (1). In den Spalten (3) und (4) sind die Schätzergebnisse einer Spezifikation in Differenzen angegeben, die abhängige Variable ist daher das Produktivitätswachstum in Ostdeutschland. Ebenso in den Spalten (5) und (6), die sich auf das Anpassungsmodell, wie in Gleichung (2) gegeben, beziehen. In Klammern sind Standardfehler der geschätzen Koeffizienten angegeben. Die Technologiedifferenz ist mit Hilfe des Modells in Spalte (2) berechnet.

	Produktivität		Produktivitäts-wachstum		Anpassung	
	Absolut	Relativ	Absolut	Relativ	Absolut	Relativ
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Reallöhne	0.41	0.53	0.32	0.71	0.07	0.35
	(0.12)	(0.11)	(0.14)	(0.15)	(0.14)	(0.14)
Arbeitsmarktpolitik	-2.36	-2.11	-2.17	-1.84	-1.85	-1.61
	(0.32)	(0.32)	(0.26)	(0.24)	(0.24)	(0.20)
Kurzarbeit	-1.45	-1.29	-1.37	-1.05	-1.38	-1.11
	(0.13)	(0.12)	(0.14)	(0.13)	(0.12)	(0.11)
Technologiedifferenz					-0.18	-0.21
					(0.04)	(0.03)
β_0	2.343	0.255	0.035	0.022	-0.036	-0.065
	(0.394)	(0.040)	(0.007)	(0.005)	(0.016)	(0.015)
γ_1	0.025	0.021	-0.002	-0.001	0.0001	0.001
	(0.004)	(0.003)	(0.001)	(0.0004)	(0.001)	(0.001)
γ_2	-0.0006	-0.0007				
	(0.0001)	(0.0001)				
$\overline{R}^2$	0.991	0.988	0.928	0.930	0.943	0.951
SEE	0.019	0.018	0.017	0.016	0.015	0.014

Die Ergebnisse für die Niveauschätzung zeigen einen signifikanten Zusammenhang zwischen Reallöhnen und Arbeitsproduktivität. Die geschätzte Substitutionselastizität von ~ 0.5 erscheint plausibel. Außerdem zeigen die Ergebnisse einen signifikanten Effekt der Indikatoren für die Arbeitsauslastung. Das heißt ein hoher Anteil an Kurzarbeit und ein hoher Anteil an arbeitsmarktpolitischen Maßnahmen ist mit einer niedrigen Arbeitsproduktivität verbunden.

Schließlich ergibt unsere Schätzung eine sinnvolle Rate des technologischen Fortschritts in Ostdeutschland. Berechnet als $\Delta \ln \hat{\theta} = (\hat{\gamma}_1 + 2 \cdot \hat{\gamma}_2 \cdot t)/(1 - \hat{\sigma})$ liegt die Schätzung bei 4% pro Jahr im Jahr 1991 und bei ungefähr 1% am aktuellen Rand, im Modell mit relativen Daten ist die Wachstumsrate ab 2006 negativ.

Die Ergebnisse für die Differenzenspezifikation und das Anpassungsmodell sind mehr oder weniger ähnlich. Die Technologiedifferenz hat dabei einen signifikant Einfluss auf die Produktivitätsentwicklung. Der geschätzte Koeffizient deutet auf eine bemerkenswerte Anpassung der totalen Faktorproduktivität hin.

Die folgenden Abbildungen stellen die Ergebnisse grafisch dar. Abbildung 6 fasst die Ergebnisse zusammen: Preise und Arbeitsauslastung zeigten eine schnelle Anpassung und Veringerung der Lücke zwischen Ost- und Westdeutschland. Die Anpassung von Reallöhnen und vorallem der totalen Faktorproduktivität verlief deutlich langsamer. Die entprechende gleichgewichtige Lücke beträgt jeweils etwa 25%, wobei beides ungefähr gleich stark zu der Produktivitätslücke von etwa 25% beiträgt.

Abbildung 1: Kurzarbeit

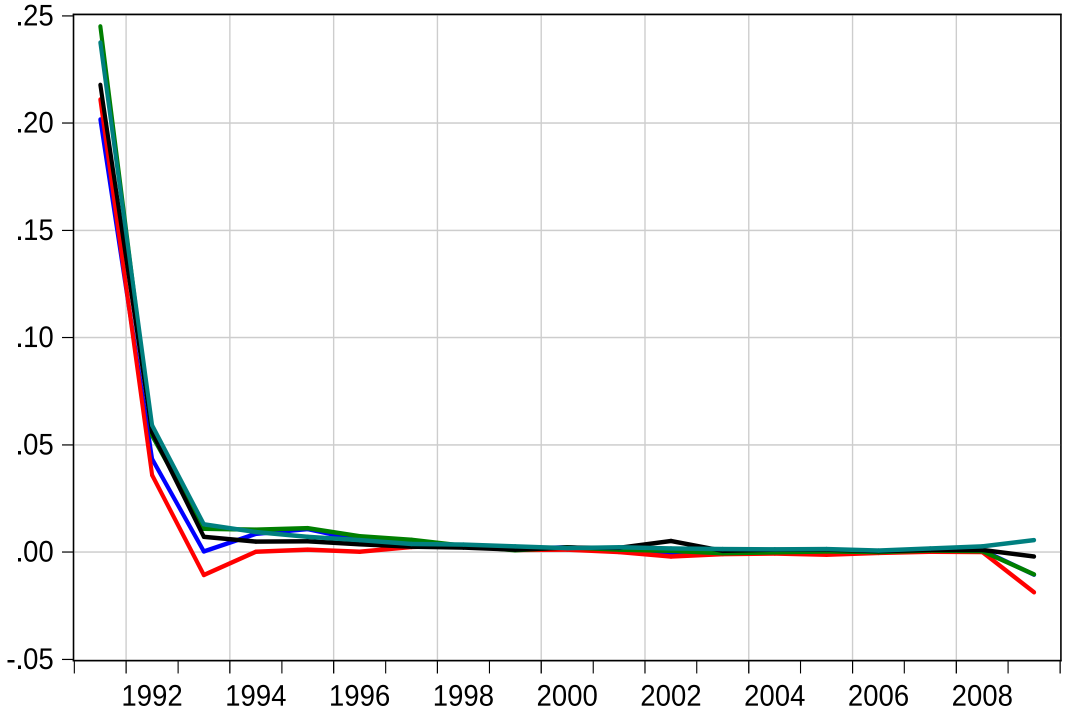
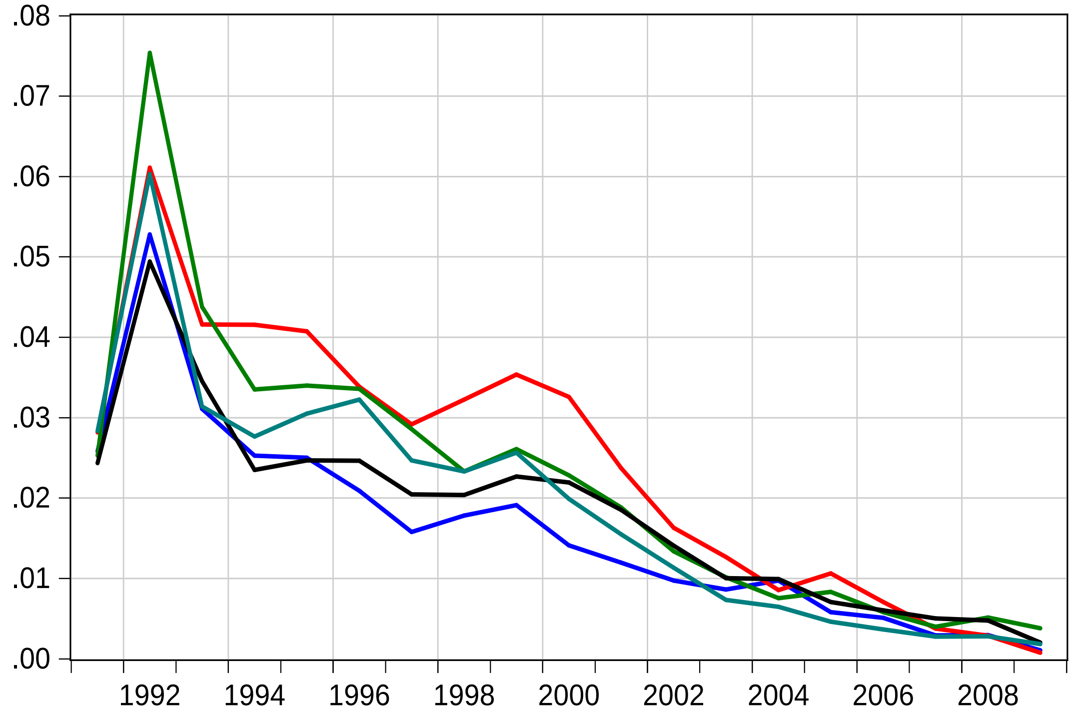


Abbildung 2: Maßnahmen der aktiven Arbeitsmarktpolitik



Ostdeutsche Bundesländer im Verhältnis zum westdeutschen Durchschnitt, Anteil an der Gesamtbeschäftigung

Abbildung 3: Schätzung der relativen Auslastung des Arbeitseinsatzes

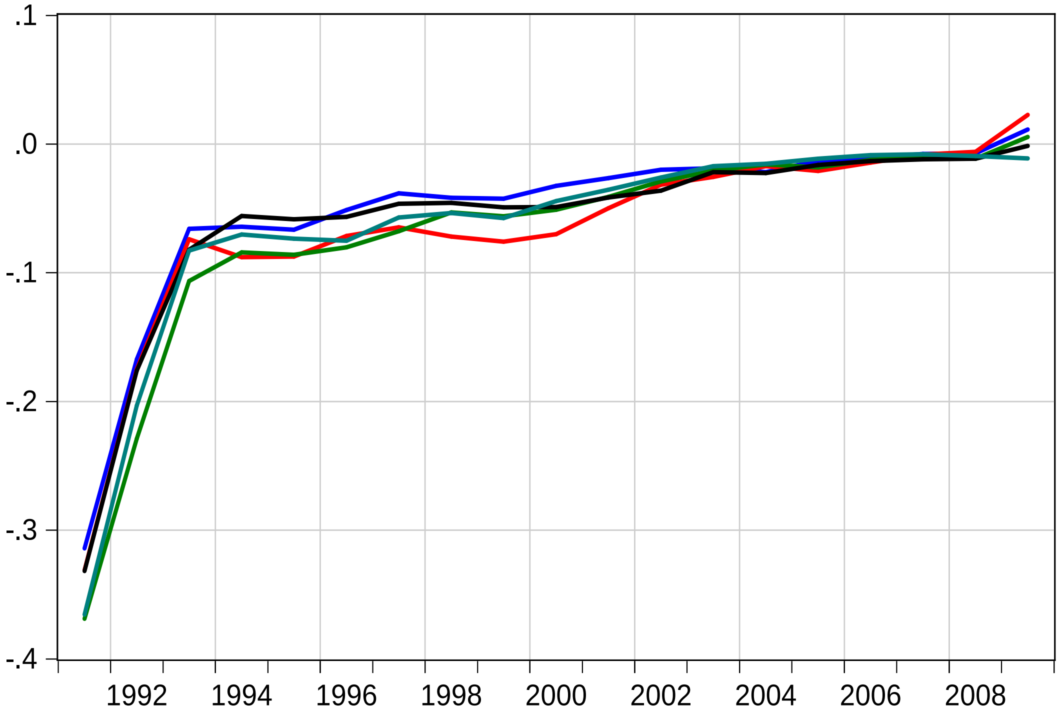
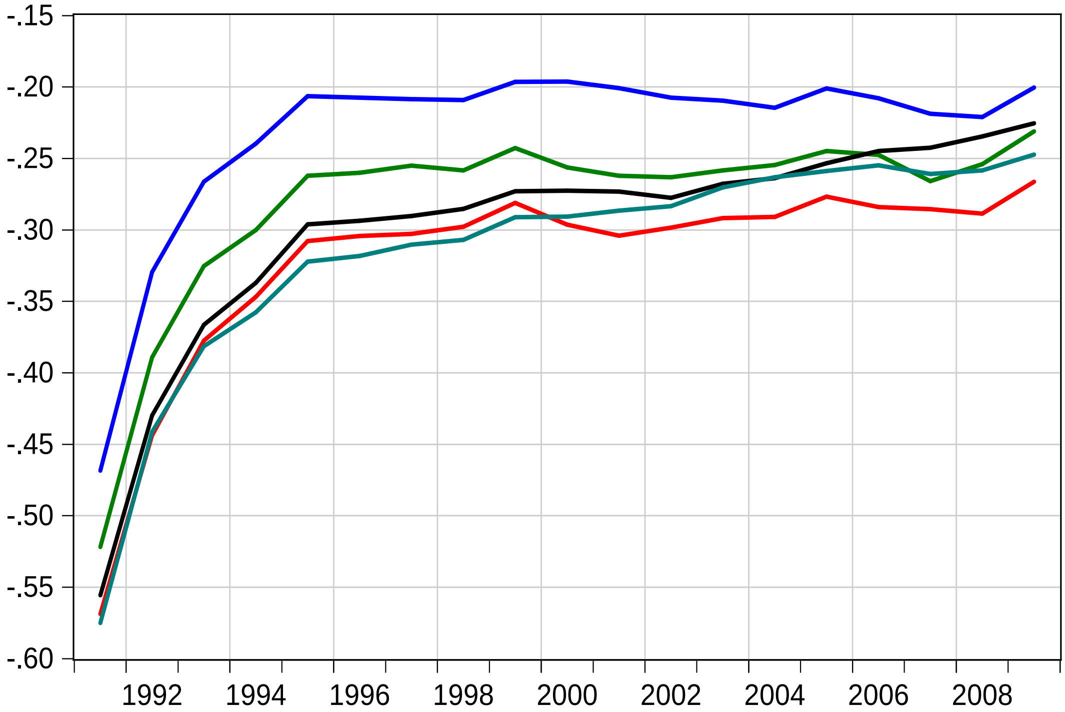


Abbildung 4: Konvergenz der realen Löhne



Ostdeutsche Bundesländer im Verhältnis zum westdeutschen Durchschnitt, logarithmierte Werte

Abbildung 5: Der Abstand in der totalen Faktorproduktivität

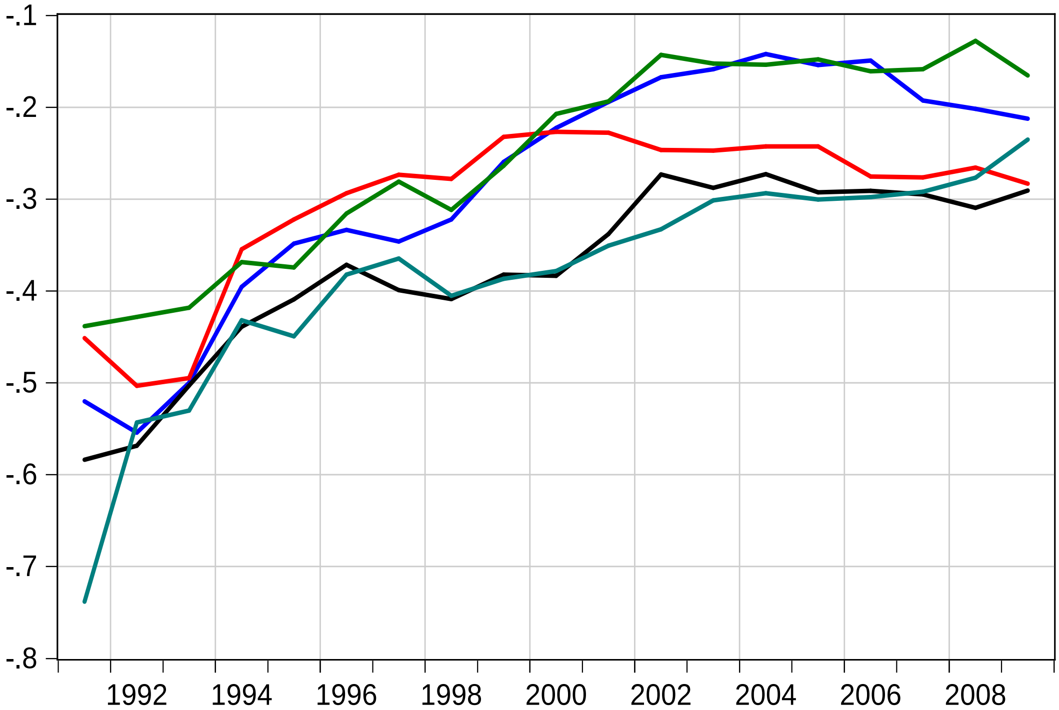
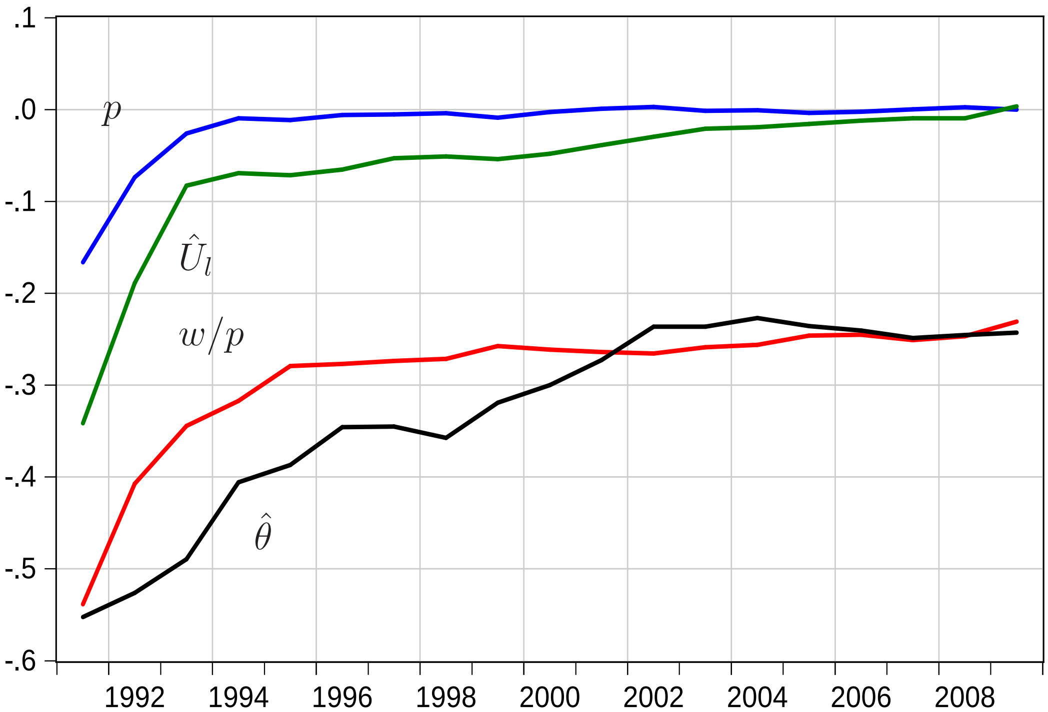


Abbildung 6: Determinanten der Arbeitsproduktivität



Ostdeutsche Bundesländer im Verhältnis zum westdeutschen Durchschnitt, logarithmierte Werte

4 Herleitungen

Das Grenzprodukt der Arbeit lässt dich durch Ableitung und Umformung bestimmen:

$$\frac{\partial YP}{\partial L} = -\frac{1}{\rho} \cdot \theta[\bullet]^{-\frac{1}{\rho}-1} \cdot (-\rho) \cdot \delta L^{-\rho-1} = \theta^{-\rho} \cdot YP^{1+\rho} \cdot \delta \cdot L^{-(1+\rho)} = \theta^{-\rho} \cdot \delta \cdot \left(\frac{YP}{L}\right)^{1+\rho}$$

denn $[\bullet]$ aus $YP = \theta \cdot [\bullet]^{-\frac{1}{\rho}}$ können wir schreiben als:

$$[\bullet]^{-\frac{1}{\rho}} = \frac{YP}{\theta} \Rightarrow [\bullet] = \left(\frac{YP}{\theta}\right)^{-\rho} \Rightarrow [\bullet]^{-\frac{1}{\rho}-1} = \left(\frac{YP}{\theta}\right)^{1+\rho}$$

Das Vorgehen zur Bestimmung des Grenzprodukt des Kapitals ist analog.

Die Grenzrate der Substitution bestimmt sich als

$$GdS = \frac{\partial YP}{\partial L} / \frac{\partial YP}{\partial K} = \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{L^{-(1+\rho)}}{K^{-(1+\rho)}} = \frac{\delta}{1-\delta} \cdot k^{1+\rho} \text{ mit } k = K/L.$$

Die Substitutionselastizität ist definiert als

$$\sigma = \frac{d(k)}{k} / \frac{d(GdS)}{GdS}.$$

Da $\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow d\ln(x) = \frac{dx}{x}$ lässt sich dieser Ausdruck weiter vereinfachen, so dass

$$\sigma = \frac{d\ln(k)}{d\ln(GdS)} = \frac{d\ln(k)}{\underbrace{d\ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)}_{=0} + (1+\rho) \cdot d\ln(k)} = \frac{1}{1+\rho}$$

Die Arbeitsproduktivität kann durch Logarithmieren und Umformen als linearer Term geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{YP}{L}\right) &= \frac{1}{1+\rho} \cdot \ln\left(\frac{\partial YP}{\partial L} \cdot \frac{1}{\theta^{-\rho} \cdot \delta}\right) \\
&= \frac{1}{1+\rho} \cdot \left(\ln\left(\frac{\partial YP}{\partial L}\right) - \ln(\theta^{-\rho} \cdot \delta)\right) \\
&= \frac{1}{1+\rho} \cdot \left(\ln\left(\frac{\partial YP}{\partial L}\right) - \ln(\theta^{-\rho}) - \ln(\delta)\right) \\
&= \frac{1}{1+\rho} \cdot \left(\ln\left(\frac{\partial YP}{\partial L}\right) + \rho \cdot \ln(\theta) - \ln(\delta)\right)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt machen wir uns die Eigenschaft $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$ zu Nutze, in dem wir die Gleichung weiter zu

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{YP}{L}\right) &= \sigma \cdot \left(\ln\left(\frac{\partial YP}{\partial L}\right) + \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \cdot \ln(\theta) - \ln(\delta)\right) \\
&= \sigma \cdot \ln\left(\frac{\partial YP}{\partial L}\right) + (1-\sigma) \cdot \ln(\theta) - \sigma \cdot \ln(\delta)
\end{aligned}$$

vereinfachen.