Hartmut Lanzinger
Marius Hofert Universität Ulm
23.04.2009

# Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 1

Abgabe am 30.04.2009

**Aufgabe 1** (6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Mengensysteme $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{F}$, $i \in I$, $I$ eine Indexmenge, heißen *unabhängig*, falls für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ und $S_j \in \mathcal{S}_j$, $j \in J$, gilt: $\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} S_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(S_j)$.

(a) Es seien $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängige $\pi$-Systeme. Zeige: Dann sind auch $\sigma(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig.

(b) Es seien $\mathcal{F}_{ij} \subset \mathcal{F}$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $j \in J$, $J$ eine Indexmenge, unabhängig. Weiter seien $\mathcal{G}_i := \sigma\big(\bigcup_{j\in J} \mathcal{F}_{ij}\big)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $\mathcal{G}_i$, $i = 1, \ldots, n$, unabhängig sind.

**Aufgabe 2** (6 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Zeige: $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$.

(b) Zeige: Falls $X$ unabhängig ist von $\mathcal{G}$, d.h. $\mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap A) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))\mathbb{P}(A)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{G}$, so gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}X$.

(c) Es sei $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\mathbb{P}(A_i) > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{G} = \sigma(A_i : i \in \mathbb{N})$ die von den $A_i$ erzeugte $\sigma$-Algebra. Zeige: $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} X \, d\mathbb{P} \, \mathbb{1}_{A_i}$.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)

(a) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\{a, b, c\}, \mathcal{P}(\{a, b, c\}), \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(\{a\}) = 2\mathbb{P}(\{b\}) = 2\mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{2}$ und die Zufallsvariable $X$ sei auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert durch $2X(a) = X(b) = X(c) = 2$. Weiter seien $\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ und $\mathcal{G}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$ Sub-$\sigma$-Algebren von $\mathcal{F}$. Berechne $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2]$ und $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]$.

(b) Betrachte folgendes Spiel: Zuerst wird ein fairer Würfel geworfen. Falls eine der Augenzahlen 1, 2, 3 geworfen wurde, wird der faire Würfel nochmals geworfen, ansonsten wird ein unfairer Würfel, der die Zahlen $1, \ldots, 4$ je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ und die Zahlen 5, 6 je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ liefert, geworfen. Wie hoch ist die erwartete Summe der beiden geworfenen Augenzahlen?

**Aufgabe 4** (5 Punkte)
Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ((0, 1), \mathcal{B}(0, 1), \lambda)$ sei die Zufallsvariable $X(\omega) = \sin(\pi\omega)$ gegeben und $\mathcal{G} = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^C \text{ ist höchstens abzählbar}\}$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{G}$ eine Sub-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{F}$ ist.

(b) Berechne $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ die beste Approximation an $X$ im $L^2$-Sinne durch eine $\mathcal{G}$-messbare, quadratisch-integrierbare Zufallsvariable ist, d.h. zeige

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \min_{Z \in L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})} \mathbb{E}[(X-Z)^2] \;\Leftrightarrow\; Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

*Bemerkung:* Da der Wahrscheinlichkeitsraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezüglich des inneren Produkts $\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbb{E}[X_1 X_2]$ ein Hilbertraum ist, spricht man aufgrund dieser Charakterisierung der bedingten Erwartung auch von der *Projektion der $X$ entsprechenden Äquivalenzklasse in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ auf den Unterraum der Äquivalenzklassen $\mathcal{G}$-messbarer Zufallsvariablen.*