

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 2

Abgabe am 07.05.2009

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Sub- σ -Algebra von $\mathcal{F}$, $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Zeige, dass $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ die fast sichere Gleichheit von X und Y impliziert.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Gegeben seien der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([-1, 1], \mathcal{B}[-1, 1], \frac{\lambda}{2})$, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -messbar. Bestimme in folgenden Fällen jeweils $\sigma(Y)$ und $\mathbb{E}[X|Y]$.

- (a) $Y(\omega) = \omega^3$;
- (b) $Y(\omega) = \omega^2$.

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Sub- σ -Algebra von $\mathcal{F}$ und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass für die *bedingte Varianz von X unter $\mathcal{G}$* $\text{Var}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}]$ gilt:

$$\mathbb{E}[\text{Var}[X|\mathcal{G}]] + \text{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \text{Var}[X].$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $N \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und identisch verteilte Zufallsvariablen $X_i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $i \in \mathbb{N}$. Weiter seien die Zufallsvariablen $N, X_1, X_2, \dots$ unabhängig und $S_N := X_1 + \dots + X_N$ mit $S_0 := 0$ falls $N = 0$. Zeige:

- (a) $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]$.
- (b) Falls zusätzlich $N, X_1, X_2, \dots \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dann gilt: $\text{Var}[S_N] = \text{Var}[X_1]\mathbb{E}[N] + \text{Var}[N]\mathbb{E}[X_1]^2$.

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X, Y)^T$ ein Zufallsvektor mit Dichte $f_{X,Y}(x, y) = 2\mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x \leq 1\}}$. Bestimme $\mathbb{E}[X|Y]$ und $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}|Y)$.

Aufgabe 11 (Jensensche Ungleichung) (4 Punkte)

- (a) Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Sub- σ -Algebra von $\mathcal{F}$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und X eine Zufallsvariable mit $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zeige, dass $\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}]$ fast sicher.
- (b) Zeige, dass die bedingte Erwartung eine Kontraktion in L^p , $p \geq 1$, ist, d.h. zeige, dass gilt: $\|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\|_p \leq \|X\|_p$, $p \geq 1$.

Aufgabe 12 (Satz von der monotonen Konvergenz, Fatou's Lemma) (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}$ eine Sub- σ -Algebra von $\mathcal{F}$. Zeige:

- (a) Falls $0 \leq X_n \nearrow X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$.
- (b) Falls $0 \leq X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so gilt $\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathcal{G}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}]$.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$ sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \Omega$ gegeben durch $f(A) := (\sup A) \mathbb{1}_{\{A \neq \emptyset\}}$. Zeige, dass für die Funktion $Q : \Omega \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Q(\omega, A) := \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_{f(A)}(\omega)$ gilt:

- (a) Für jedes feste $A \in \mathcal{F}$ ist $\omega \rightarrow Q(\omega, A)$ eine Version von $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{F}]$.
- (b) Es gibt keine $\mathbb{P}$ -Nullmenge N derart, dass $A \rightarrow Q(\omega, A)$ für jedes feste $\omega \in N^C$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ ist.

<http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2009/wt.html>