Hartmut Lanzinger
Marius Hofert Universität Ulm
07.05.2009

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 3

Abgabe am 14.05.2009

Aufgabe 14 (Galton-Watson Prozess) (4 Punkte)
Es sei $\{Z_{n,k} \,|\, n, k \in \mathbb{N}\}$ eine Doppelfolge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $0 < \mu := \mathbb{E}[Z_{1,1}] < \infty$. Definiere

$$X_0 := 1,$$
$$X_{n+1} := \sum_{k=1}^{X_n} Z_{n+1,k} \ (:= 0 \text{ falls } X_n = 0),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeige, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $S_n := \frac{X_n}{\mu^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_{m,k} : 1 \leq m \leq n, k \geq 1)$ bildet.

Aufgabe 15 (3 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Submartingale bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass dann auch $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

(a) Es seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Überprüfe, ob folgende Zufallsvariablen Stoppzeiten bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind:
   - (i) $\tau_1 - \tau_2$;
   - (ii) $\tau_1 \cdot \tau_2$;
   - (iii) $\tau_1 \wedge \tau_2$;
   - (iv) $\tau_1 \vee \tau_2$.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Überprüfe, ob folgende Zufallsvariablen Stoppzeiten bezüglich der natürlichen Filtration von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind:
   - (i) $\tau_1 = 7\mathbb{1}_{\{X_2=0\}} + \mathbb{1}_{\{X_2=1\}}$;
   - (ii) $\tau_2 = \begin{cases} n, & \text{falls } X_i > 0,\ 1 \leq i \leq n, \\ \min\{1 \leq i \leq n : X_i = 0\}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{F}_{\tau\wedge n} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_n$.

(b) Zeige, dass mit einer streng monoton wachsenden Folge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: τ ist eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 18 ("Double or nothing" Martingal) (5 Punkte)

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien i.i.d. Zufallsvariablen ξ_n gegeben mit $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = \mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Definiere $X_1 := 1$ und $X_{n+1} := 2\xi_n X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie $\mathcal{F}_1 := \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

(a) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

(b) Es sei $\tau := \inf\{k \in \mathbb{N} : \xi_k = 0\}$. Zeige, dass τ eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist mit $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

(c) Zeige, dass $\mathbb{E}[X_n] = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\mathbb{E}[X_\tau] = \infty$.