Hartmut Lanzinger
Marius Hofert Universität Ulm
14.05.2009

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 4

Abgabe am 28.05.2009

Aufgabe 19 (3 Punkte)
Es seien $X, Y \sim F$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit absolutstetiger und positiver Verteilungsfunktion F. Zeige:

$$\mathbb{P}(X \leq x | X \vee Y) = \mathbb{1}_{\{X \vee Y \leq x\}} + \mathbb{1}_{\{X \vee Y \geq x\}} F(x)/(2F(X \vee Y)).$$

Aufgabe 20 (6 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien i.i.d. Zufallsvariablen X_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ gegeben. Weiter seien die natürliche Filtration von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und das Martingal $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$, sowie $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$ gegeben.

(a) Zeige, dass τ eine Stoppzeit ist mit $\mathbb{P}(\tau = 2n) = 0$, $\mathbb{P}(\tau = 2n - 1) = (-1)^{n+1}\binom{1/2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeige, dass $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ und $\mathbb{E}[\tau] = \infty$.

(c) Zeige, dass $\mathbb{E}S_{n\wedge\tau} = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(d) Ist auch $(S_1, S_\tau, 0, 0, \dots)$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 21 (3 Punkte)

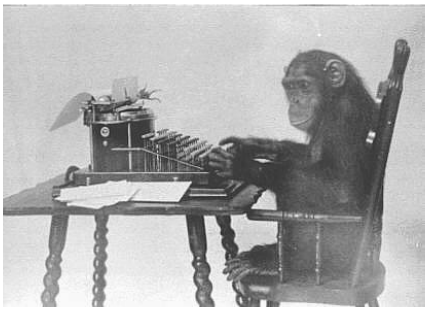
(a) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend mit $\mathbb{E}[|\varphi(X_n)|] < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

(b) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal bezüglich der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeige, dass $(X_n^-)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine an die Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptierte Folge von integrierbaren Zufallsvariablen. Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann ein Martingal ist, wenn für jede beschränkte Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_1]$ gilt.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Zeige, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n := \exp(-n/2 + \sum_{k=1}^n X_k)$, $n \in \mathbb{N}$, ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bildet und berechne $(\langle S\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Hinweis: Der zu $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige *Klammerprozess* $\langle S\rangle = (\langle S\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert als diejenige vorhersehbare Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die zur Doobschen Zerlegung von $(S_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gehört.

Aufgabe 24 (4 Punkte)



(a) Es sei τ eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Für ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ gelte $\mathbb{P}(\tau \leq n + N|\mathcal{F}_n) > \varepsilon$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

(b) Der Schimpanse Affi tippt gerne auf einer Schreibmaschine. Pro Zeiteinheit tippt er ein Symbol ("A-Z") und produziert so eine i.i.d. Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei τ der erste Zeitpunkt zu dem Affi den Schriftzug "ABRACADABRA" getippt hat. Zeige: $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

(c) Zeige, dass sogar $\mathbb{E}[\tau] = 26^{11} + 26^4 + 26$.

http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2009/wt.html