Hartmut Lanzinger
Marius Hofert

Universität Ulm
28.05.2009

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 5

Abgabe am 18.06.2009

Aufgabe 25 (Doob's maximal inequality, $p = 1$) (6 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n=0}^\infty$ ein nichtnegatives Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$. Aus dem Beweis zur Doobschen Ungleichung (Satz 2.5) folgt

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\max_{0\le k\le n} X_k\Big)^p\Big] \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}[X_n^p]$$

für $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$. Zeige, für $p = 1$:

$$\mathbb{E}\Big[\max_{0\le k\le n} X_k\Big] \le \frac{e}{e-1}(1 + \mathbb{E}[X_n \log^+ X_n]).$$

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien zwei Folgen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen gegeben, wobei alle auftretenden Zufallsvariablen paarweise unabhängig seien. Des Weiteren gelte für ein $\alpha > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1/n, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n,$$
$$\mathbb{P}(Z_n = n^\alpha) = 1/n, \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n.$$

Untersuche, für welche $\alpha > 0$ die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n := Y_n Z_n$, $n \in \mathbb{N}$, gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 27 (7 Punkte)
Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}[0,1), \lambda)$ sei die Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}_n := \sigma\Big(\Big[\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}}\Big), j = 1, \dots, 2^{n+1}\Big),\ n \in \mathbb{N}_0,$$

und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$X_n(\omega) := 2^n \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2}\right)}(\omega),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

(a) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bildet.

(b) Überprüfe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf gleichgradige Integrierbarkeit sowie auf fast sichere und L^1-Konvergenz. Im Falle der Konvergenz, was ist der jeweilige Grenzwert?

(c) Kann die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ um eine Zufallsvariable X_∞ erweitert werden, so dass $(X_n)_{n\in\bar{\mathbb{N}}_0}$ ein Martingal bildet?

Aufgabe 28 (5 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Weiter seien $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren und $\mathcal{F}_\infty := \sigma\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\big)$. Zeige, dass sowohl fast sicher, als auch in L^1, gilt:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \to \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \ (n \to \infty).$$

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{F}$ eine monoton fallende Folge von σ-Algebren. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein inverses Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar ist.

`http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2009/wt.html`