

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 6

Abgabe am 25.06.2009

Aufgabe 30 (Borel-Cantelli Lemmas)

(12 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen, d.h. $A_n \in \mathcal{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

folgt $\omega \in \{A_n \text{ i.o.}\} \Leftrightarrow \omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

- (a) Welche Werte kann $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.})$ nur annehmen?
- (b) Zeige mit Hilfe elementarer Mittel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung das 1. *Borel-Cantelli Lemma*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0.$$

- (c) Zeige das 1. Borel-Cantelli Lemma unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Ereignisse $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind mit Hilfe des Kolmogorovschen Satzes über die fast sichere Konvergenz von Reihen.
- (d) Zeige das 2. *Borel-Cantelli Lemma*: Falls $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 1.$$

- (e) Für diese Teilaufgabe seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$ und $A_n := [0, 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = 0$, aber $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$.
- (f) Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Zeige:

$$X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| > \varepsilon) < \infty \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 31

(3 Punkte)

Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und $0 < a_n \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Zeige:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Var}[X_k]}{a_k^2} < \infty \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{a_n} \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

Aufgabe 32

(3 Punkte)

Es seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = n^{-\alpha}) = \mathbb{P}(X_n = -n^{-\alpha}) = 1/2$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$. Zeige:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k \text{ konvergiert f.s.} \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 33

(8 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen. Zeige folgende schwache bzw. starke Gesetze der großen Zahlen:

- (a) $X_n/n \xrightarrow{p} 0 \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow \mathbb{P}(|X_1| < \infty) = 1$;
- (b) $X_n/n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow X_1 \in L^1$;
- (c) $\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|/n \xrightarrow{p} 0 \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow n\mathbb{P}(|X_1| > n) \rightarrow 0$;
- (d) $\max_{1 \leq k \leq n} |X_k|/n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \ (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow X_1 \in L^1$.

<http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2009/wt.html>