Hartmut Lanzinger
Marius Hofert Universität Ulm
25.06.2009

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 7

Abgabe am 02.07.2009

Aufgabe 34 (5 Punkte)
Es seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen, $1 \leq m \leq n$, $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine in ihren Argumenten symmetrische Funktion, d.h. $h(\sigma(\boldsymbol{x})) = h(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, für jede Permutation $\sigma \in S_m$. Die *U-Statistik* U_n zum *Kern* h ist dann definiert durch

$$U_n := \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} h(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}).$$

(a) Zeige, dass $(U_n)_{n \geq m}$ ein inverses Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \geq m}$ bildet, wobei $\mathcal{F}_n := \sigma(U_k, k \geq n)$, $n \geq m$ ist.

(b) Finde je ein Beispiel für eine U-Statistik für $m = 1$ bzw. $m = 2$.

Aufgabe 35 (Weierstraßscher Approximationssatz) (5 Punkte)
Der *Weierstraßsche Approximationssatz* besagt, dass es zu jeder stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Polynomen f_n gibt, die auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Zeige zunächst die punktweise Konvergenz mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen. Zeige dann die gleichmäßige Konvergenz mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung. Finde außerdem zu einem $\eta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \eta$ für alle $x \in [0,1]$ falls $n \geq n_0$.

Aufgabe 36 (3 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien i.i.d. Zufallsvariablen X, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Zeige, dass für $r > 0$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathbb{E}[|X|^r] < \infty$;

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{X_n}{n^{1/r}} = 0$ f.s.;

(c) $\limsup\limits_{n \to \infty} \frac{|X_n|}{n^{1/r}} = 0$ f.s..

Aufgabe 37 (3 Punkte)
(a) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ seien eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen und eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Borelmengen gegeben. Zeige, dass

$$\left\{ \sum_{k=n}^{2n} X_k \in A_n \text{ i.o.} \right\}$$

ein terminales Ereignis ist.

(b) Zeige anhand eines Beispiels, dass für eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen und eine Borelmenge A das Ereignis

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in A \text{ i.o.}\right\}$$

im Allgemeinen kein terminales Ereignis ist.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable. Berechne die momenterzeugende Funktion, die kumulantenerzeugende Funktion und die zugehörige Fenchel-Legendre Transformation von X, falls X der jeweils angegebenen Verteilung folgt:

(a) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$;

(b) $X \sim \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$;

(c) $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$;

(d) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.