Hartmut Lanzinger
Marius Hofert Universität Ulm
02.07.2009

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 8

Abgabe am 09.07.2009

Aufgabe 39 (Lévy Metrik) (6 Punkte)

Zeige, dass

$$d_L(F,G) := \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x+\varepsilon) + \varepsilon \text{ for all } x \in \mathbb{R}\}$$

eine Metrik auf dem Raum der Verteilungsfunktionen definiert. Zeige außerdem, dass für Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, \dots$ gilt:

$$d_L(F_n, F) \to 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)\;\forall\, x \in C(F).$$

Warum kann hierzu nicht die Supremums-Metrik herangezogen werden?

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Es sei $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Folge von Zufallsvariablen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[g(|X_n|)] < \infty$. Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. die zugehörige Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen) straff ist.

Bemerkung: Hieraus folgt, dass L^p-beschränkte Folgen von Zufallsvariablen, $p > 0$, straff sind, sowie Folgen gleichgradig integrierbarer Zufallsvariablen.

Aufgabe 41 (Lévy's Convergence Theorem) (10 Punkte)

(a) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ für $n \to \infty$. Zeige, dass dann auch für die zugehörigen charakteristischen Funktionen gilt: $\phi_n(t) \to \phi(t)$ für $n \to \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit zughöriger Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von charakteristischen Funktionen. Weiter gelte $\phi_n(t) \to \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, für eine Funktion ϕ welche stetig in 0 sei. Zeige, dass es eine Zufallsvariable X mit charakteristischer Funktion ϕ gibt, so dass $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ $(n \to \infty)$.

(c) Kann in (b) auf die Annahme der Stetigkeit von ϕ in 0 verzichtet werden?

http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2009/wt.html