Hartmut Lanzinger
Marius Hofert Universität Ulm
09.07.2009

Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 9

Abgabe am 16.07.2009

Aufgabe 42 (5 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mu := \mathbb{E}[X_1] = 0$ und $0 < \sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] < \infty$, sowie $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass $\limsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{n} = \infty$ fast sicher gilt.

(b) Zeige, dass $S_n/\sqrt{n}$ nicht in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

Aufgabe 43 (5 Punkte)
Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathrm{B}(1, p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $\sum_{k=1}^\infty p_k(1-p_k) = \infty$. Zeige:

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n p_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n p_k(1-p_k)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(0,1) \ (n \to \infty).$$

Aufgabe 44 (Delta Methode) (5 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] < \infty$, sowie $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige:

(a) Falls g einmal stetig differenzierbar ist, so gilt:

$$\sqrt{n}\Big(g\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - g(\mu)\Big) \xrightarrow{\mathrm{d}} N\big(0, \sigma^2(g'(\mu))^2\big) \ (n \to \infty).$$

(b) Falls g zweimal stetig differenzierbar ist mit $g'(\mu) = 0$ so gilt:

$$2n\Big(g\Big(\frac{S_n}{n}\Big) - g(\mu)\Big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \sigma^2 g''(\mu)\chi_1^2 \ (n \to \infty).$$

Hinweis: Verwende *Slutsky's Theorem*: Aus $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} c \in \mathbb{R}$ folgt $X_nY_n \xrightarrow{\mathrm{d}} cX$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 45 (5 Punkte)
Gegeben seien zwei stochastische Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ heißen *ununterscheidbar*, falls gilt:

(i) $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ t \geq 0) = 1$.

$(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *Version* von $(Y_t)_{t\geq 0}$, falls gilt:

(ii) $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$, $t \geq 0$.

Zeige:

(a) (i) impliziert (ii);

(b) (ii) impliziert nicht notwendigerweise (i);

(c) Besitzen $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ fast sicher rechtsseitig stetige Pfade, so gilt (i) genau dann, wenn (ii) gilt.

`http://www.uni-ulm.de/mawi/zawa/lehre/sommer2009/wt.html`