UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 1

Abgabe: Montag, 26. Oktober 2009, vor den Übungen

1. Sei a irgendein nicht weiter definiertes Symbol und N die Menge aller Wörter w, die sich mit diesem Symbol schreiben lassen (das leere Wort sei mit ϵ bezeichnet). Wir schreiben wa für das Wort, das aus w durch Anhängen von a entsteht. Zeige, daß das System (N, S, ϵ) mit $S: \ N \to N, \ w \to wa$ die Axiome P1- P4 erfüllt und formuliere ohne Beweis und unter Voraussetzung von P5 möglichst einfach die Addition in diesem System.
   In der Lösung darf die Existenz irgendeines Systemes natürlicher Zahlen nicht benutzt werden.
   (6 Punkte)

2. Der Begriff der Unendlichkeit kann auch so ohne die Existenz natürlicher Zahlen formuliert werden:
   Eine Menge M ist unendlich, falls es eine echte Teilmenge $M' \subset M$ und eine Bijektion $\varphi: \ M' \to M$ gibt.
   Zeige, daß jedes System natürlicher Zahlen unendlich ist. (3 Punkte)

3. Zeige, daß es bis auf Isomorphie nur ein System natürlicher Zahlen gibt und zwar mittels Beweis der folgenden Aussage:
   Für zwei Systeme $(M, S; 0_M)$ und $(N, T, 0_N)$ gibt es stets eine Bijektion $\phi: \ M \to N$, die verträglich mit der Nachfolgerabbildung ist, d.h. für die $\phi \circ S = T \circ \phi$ gilt.
   Leite aus dieser Eigenschaft die Relationstreue von ϕ bzgl. Addition und Anordnung her.
   (8 Punkte)

4. Für diese Aufgabe seien die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit den in der Analysis eingeführten Eigenschaften als bekannt vorausgesetzt. Prüfe, welche der Peano- Axiome vom System $(\mathbb{R}, S, 0)$ mit $S(x) = x + 1$ erfüllt werden.
   Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbb{R}$, die aus allen *induktiven* Teilmengen von $\mathbb{R}$ besteht. Zeige, daß der Schnitt
   $$N = \bigcap_{M \in \mathcal{I}} M$$
   mit der obigen Abbildung S ein System natürlicher Zahlen bildet. (7 Punkte)