UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 12

Abgabe: Dienstag, 26. Januar 2010, vor den Übungen

1. (a) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig.
   Für $s > 0$ sei
   $$\chi_s(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}, & \text{falls} \quad u \in [-\delta, \delta] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   und
   $$f_s(x) := (f * \chi_s)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\chi_s(x-t)\, dt.$$
   Zeige:
   Für alle $\delta > 0$ gilt: $f_s(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ist f k- mal stetifg differenzierbar, so ist f_s $(k+1)$- mal stetig differenzierbar.

   (b) Die Definitionen und Voraussetzungen seien wie in a).
   Ist $A > 0$ und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $\delta_0 = \delta_0(A, \epsilon) > 0$, das von f abhängen kann, so daß für alle $\delta < \delta_0$ und für alle $x \in [-A, A]$ gilt:
   $$|f(x) - f_s(x)| < \epsilon.$$

   (c) Es sei $A > 2$. Die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \to g(x)$ sei für $x \in [-A, A]$ stetig. Es sei $g(x) = 0$ für $x \notin [-A, A]$.
   Für $c > 0$ sei
   $$\begin{aligned} N_c(u) &= \frac{c}{\sqrt{\pi}} \exp(-c^2u^2) \quad \text{und} \\ g_{(c)}(x) &= (g * N_c)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)N_c(x-t)\, dt. \end{aligned}$$
   Es kann als bekannt vorausgesetzt werden, daß $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$ ist.
   Zeige:

Es kann $g_{(c)}(x)$ in eine Taylorreihe um 0 entwickelt werden, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, d.h. Konvergenzradius ∞ besitzt.

Hinweis:
Schreibe $N_c(x-t)$ als Potenzreihe in $(x-t)$ und schätze die Koeffizienten von x^n ab, die durch Integration über t entstehen.

(d) Die Definitionen und Voraussetzungen seien wie in c). Außerdem sei A fest gewählt.
Zeige:
Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein c_0, so daß für alle $x \in [-A+1, A-1)$ gilt:

$$|g_{(c)}(x) - g(x)| < \epsilon.$$

(e) (Weierstraßscher Approximationssatz):
Es sei $h: [-B, B] \to \mathbb{C}$ stetig, $B > 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein Polynom P, so daß für alle $x \in [-B, B]$ gilt

$$|h(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Hinweis:
Benütze die Ergebnisse von c) und d).

(24 Punkte)