UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 14

Abgabe: Dienstag, 9. Februar 2010, vor den Übungen

1. Dies ist die Fortsetzung der Aufgabe 1 des Übungsblattes 13. Zur Erinnerung nochmals die Voraussetzungen:
   Für $0 < \beta < 1/2$ sei C_β die Menge der stetigen Funktionen $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$, für die es eine Konstante $c(f) > 0$ gibt mit
   $$|f(x)| \leq c(f) \cdot e^{\beta x},$$
   für alle $x \in [0, \infty)$.
   Wir definieren das <u>innere Produkt</u> $\langle \cdot | \cdot \rangle_L$ durch:
   $$\langle f|g \rangle_L = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}e^{-x}\, dx.$$
   (a) Es sei $0 < \beta < 1/2$ und $f \in C_\beta$. Das Polynom $P_n(\cdot, f): x \to P_n(x, f)$ sei definiert durch
      i. $grad\, P_n(\cdot, f) \leq n$
      ii. Für alle Polynome Q_n vom Grad kleiner gleich n gilt:
      $$\int_0^\infty |f(x) - P_n(x, f)|^2 e^{-x}\, dx \leq \int_0^\infty |f(x) - Q_n(x)|^2 e^{-x}\, dx.$$
      Das Gleichheitszeichen gilt genau für $Q_n := P_n(\cdot, f)$.

      Drücke $P_n(\cdot, f)$ als Linearkombination der $\tilde{L_j}$ mit $j \leq n$ aus.

   (8 Punkte)

2. Das Sierpinski- Dreieck wird wie folgt rekursiv konstruiert:
   Die Menge D_0 ist eine gleichseitige Dreiecksfläche (d.h. ein Dreieck mit der inneren Fläche) der Seitenlänge 1. Ist $D_n = F_1 \cup \ldots \cup F_l$ eine endliche Vereinigung von gleichseitigen Dreiecksflächen F_j, die sich jeweils nur in Randpunkten berühren, so bilden wir D_{n+1} wie folgt: F_j^U sei das Innere

der um 180 Grad gedrehten Dreiecksfläche F_j, dann ist D_{n+1} die Vereinigung der Mengen $F_j \setminus \frac{1}{2} F_j^U$ für $j = 1 \ldots n$. Das Sierspinski- Dreieck ist dann $D = D_0 \cap D_1 \cap D_2 \cap \ldots$.

Berechne das Jordanmaß sowie die fraktale Dimension von D. (7 Punkte)

3. Der Menger- Schwamm ist ein räumliches Analogon zur Cantor- Menge. Er ist wie folgt definiert: $M = M_0 \cap M_1 \cap \ldots$, $M_0 = [0,1]^3$, und rekursiv durch

$$M_{n+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; \exists j,k,l \in \{0,1,2\} : \; (3x-j, 3y-k, 3z-l) \in M_n, \text{ und in } (j,k,l) \text{ ist höchstens eine Eins}\}.$$

Berechne die fraktale Dimension

(a) des Menger- Schwamms M,

(b) des Schnittes S von M mit der Fläche $\{x,y,z)^T \in [0,1]^3 | \; z = 0\}$,

(c) des Schnittes D von M mit der Diagonalen $\{t,t,t)^T | \; t \in [0,1]\}$. (9 Punkte)

Dies ist das letzte Übungsblatt zur Vorlesung "Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik". Mit 168 oder mehr Punkten sind die Scheinkriterien erreicht. Wir wünschen Euch für Euer weiteres Studium alles Gute.