UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 24. November 2009, vor den Übungen

1. Es sei K irgendein Körper und

$$K[X] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n |\ a_n \in K \right\}$$

der Ring der formalen Potenzreihen über K mit der üblichen Addition und dem Cauchyprodukt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Betrachte die Abbildung

$$v:\ K[X] \to \mathbb{N}_0, \quad v(f(X)) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 |\ a_0, \ldots, a_{n-1} = 0\}, \quad v(0) = \infty.$$

(a) Zeige, dass $K[X]$ ein Integritätsring ist, d.h. ist das Cauchyprodukt koeffizientenweise null, so waren die Faktoren koeffizientenweise null.

(b) Zeige die Relationen $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$ und $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ für $f, g \neq 0$.

(c) Zeige, daß $1 - X$ in $K[X]$ stets invertierbar ist.

(10 Punkte)

2. Der 2- adische Körper ist die Menge

$$\mathbb{Q}_2 := \left\{ \sum_{n=-m}^{\infty} a_n 2^n |\ a_n \in \{0, 1\},\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

der formalen Laurentreihen in 2 mit Koeffzienten in $\{0, 1\}$. Addition und Multiplikation sind wie im formalen Potenzreihenring erklärt, wenn man anschließend binär reduziert, d. h. durch Übertrag alle Koeffienten zu Werten aus $\{0, 1\}$ reduziert. Zeige, daß $\mathbb{Q}_2$ tatsächlich ein Körper ist (es muß nur die Invertierbarkeit aller von null verschiedenen Reihen gezeigt werden).

Beachte, daß auch $\mathbb{Q}_2$ ein formeller Ring ist, d.h. jede Reihe existiert hier unabhängig von ihrem Wert. (7 Punkte)

3. Betrachte in Analogie zur Aufgabe 1 die Abbildung $v(\alpha) = \max\{e \in \mathbb{Z}| \ 2^e|\alpha\}$ und zeige, daß $v(\alpha + \beta) \geq \min\{v(\alpha, v(\beta)\}$ ist.

   Folgere dann, daß $|\alpha|_v = 2^{-v(\alpha)}$ mit $|0|_v = 0$ ein Betrag ist (d.h. er ist positiv definit, multiplikativ und erfüllt die (verschärfte) Dreiecksungleichung. (7 Punkte)