UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Grundlagen und Einzelfragen der Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 7

Abgabe: Dienstag, 8. Dezember 2009, vor den Übungen

1. Ein beliebter Ansatz zur Untersuchung eines Ringes $(R, +, \cdot)$ ist es, eine Kongruenzrelation $\equiv$ auf R zu definieren und den (meist viel einfacheren) Ring $(\overline{R}, +, \cdot)$ der Kongruenzklassen zu untersuchen. Für den Fall $R = \mathbb{Z}$ erhält man so sie Ringe $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_m$, die in der elementaren Zahlentheorie betrachtet werden. Diese Ringe gehören zu den mod - Relationen $a \equiv b \mod m \Leftrightarrow m|(b-a)$.
   Zeige, daß es keine anderen Kongruenzrelationen auf $\mathbb{Z}$ gibt. (8 Punkte)

2. Es sei $(K, +, \cdot)$ irgendein Körper. Sein Primkörper ist der kleinste in K enthaltene Körper (wobei wir $\{0\}$ nicht als Körper ansehen, er muß mindestens eine Null und eine von der Null verschiedene Eins enthalten).
   Wir können die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in einen beliebigen Körper K einbetten mithilfe der Abbildung
   $$\phi: \ \mathbb{N} \to K, \quad k \to \underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{k-\text{mal}}.$$
   Uber die Festlegung $\phi(-n) = -\phi(n)$ (auf der rechten Seite steht die Negation aus K) wird daraus eine Abbildung $\phi: \ \mathbb{Z} \to K$, die (da sie über Nachfolger definiert ist) ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(K, +)$ ist.
   Zeige, daß das Bild $\phi(\mathbb{Z})$ entweder isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder einem $\mathbb{Z}_p$ mit einer Primzahl p ist. Folgere daraus, daß es bis auf Isomorphie nur die Primkörper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_p$ gibt.

   Hinweis:
   Isomorphie ist in Ringen wie folgt definiert:
   Es seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \odot)$ Ringe. Eine Abbildung $\phi: \ R \to S$ heißt (Ring-)homomorphismus, falls für alle $a, b \in R$ gilt:

   - $\Phi(a + b) = \Phi(a) \oplus \Phi(b)$
   - $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \odot \Phi(b)$
   - $\Phi(1_R) = 1_S$.

   Ein bijektiver (Ring-)homomorphismus heißt (Ring-)isomorphismus. (16 Punkte)