UNIVERSITÄT ULM

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 10

Abgabe: Mittwoch, 30. Juni 2010, vor den Übungen

1. Betrachte die Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ und bestimme folgende Grenzwerte im Falle ihrer Existenz:

   (a) $\lim\limits_{x\to a} f(x), \quad f(x) = \dfrac{x^k - a^k}{x-a}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ sowie $D = \mathbb{R}\backslash\{a\}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x), \quad f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x+1}$ mit $D = (-1, \infty)$.

   (c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x), \quad f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x+1}$ mit $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. (5 Punkte)

2. Die durch $f(x) = x^2 - 4x - 3$ auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist dort stetig. Bestimme zu $\epsilon > 0$ explizit ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(1)$ gilt: $|f(x) - f(1)| < \epsilon$. (4 Punkte)

3. Untersuche die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{für} \quad x \le 0 \\ x^2 - x + a, & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ fest.

   (b) $f(x) = [x] + (x - [x])^2$. (5 Punkte)

4. Es seien $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Zeige, daß dann auch $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1]$ gilt. (4 Punkte)

5. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in 0 stetig und mit $f(0) = 1$. Zudem sei

$$f(x+y) \le f(x) \cdot f(y)$$

   für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, daß f stetig auf $\mathbb{R}$ ist. (6 Punkte)