UNIVERSITÄT ULM

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 11

Abgabe: Mittwoch, 7. Juli 2010, vor den Übungen

1. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, x_0 ein beidseitiger Häufungspunkt von D und f stetig in x_0.
   Dann ist $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. (3 Punkte)

2. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ mit $D = (-3,-1) \cup \{0\} \cup (1,5)$ und

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für} \quad -3 < x < -1 \\ c, & \text{für} \quad x = 0 \\ x+5, & \text{für} \quad 1 < x < 5. \end{cases}$$

   Entscheide für jede Wahl von c, in welchen Punkten von $x_0 \in D$ die Funktion f stetig ist.
   (3 Punkte)

3. Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = (-3,0) \cup \{1\}$ und

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für} \quad -3 < x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

   Es sei $\epsilon_1 := \frac{1}{2}$ und $\epsilon_2 := \frac{1}{100}$. Gib für jedes $x_0 \in D$ die größten $\delta(\epsilon_i)$ mit $i = 1,2$ an, so daß gilt:

$$|x - x_0| < \delta(\epsilon_i) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon_i.$$

   (6 Punkte)

4. Es sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to g(x)$ mit $g(x) = \begin{cases} x, & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \\ 5, & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$

   Es sei $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ stetig in $x_0 = 2$ und $f(2) = 0$.

   (a) Zeige: Die Funktion $g \circ f$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

   (b) Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(2 + \dfrac{1}{n})$? (4 Punkte)

5. Bestimme

(a) den größtmöglichen Definitionsbereich D

(b) für $x_0 \notin D$ die Ausdrücke $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

(c) die Ausdrücke $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

für die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$

i. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

ii. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 3}$

iii. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}$

iv. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3}{x^2 + x + 2}$ (8 Punkte)