UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 5. Mai 2010, vor den Übungen

1. (a) Die Funktion f sei durch

$$f := \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^2 - 2x + 1$$

definiert. Finde disjunkte Mengen X_1, X_2 mit $\mathbb{R} = X_1 \cup X_2$, so daß die Restriktionen $f_{|X_1}$ und $f_{|X_2}$ injektiv sind.

(b) Nun sei f durch

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^3 + a \cdot x$$

definiert. Entscheide, für welche der folgenden Werte von a die Funktion f bijektiv ist und gib jeweils das Urbild $f^{-1}(\{0\})$ an:

i. $a = 3$
ii. $a = 0$
iii. $a = -1$

(6 Punkte)

2. Zeige die de- Morganschen- Regeln:
Sind X, Y, Z Mengen, so ist

$$\begin{aligned} Z \backslash (X \cup Y) &= (Z \backslash X) \cap (Z \backslash Y) \quad \text{und} \\ Z \backslash (X \cap Y) &= (Z \backslash X) \cup (Z \backslash Y) \end{aligned}$$

(4 Punkte)

3. Bestimme jeweils die Komposition $f \circ g$ und prüfe, ob die Funktion g die Inverse zu f ist:

(a) $f := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to y^2, \quad g := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to 3x - 1$

(b) $f := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to 3y - 1, \quad g := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$

(c) $f := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \to 5y + 2, \quad g := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

(3 Punkte)

4. Es sei $K := \{0, 1\}$.
Die Verknüpfungen der Addition und Multiplikation sind auf K gegeben durch:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Zeige:

(a) K erfüllt die Körperaxiome $(K1) - (K5)$.

(b) Es kann keine Relation "$<$" auf K definiert werden, so daß K die Anordnungsaxiome $(A1) - (A3)$ (mit K statt $\mathbb{R}$) erfüllt.

(5 Punkte)

5. Gegeben sei ein angeordneter Körper $(K, <)$, mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ versehen.

(a) Zeige: Definiert man auf K Verknüpfungen $\oplus$ und $\circ$ durch

$$a \oplus b := a + b + 1 \quad \text{und} \quad a \circ b = a + b + a \cdot b,$$

so erhält man einen Körper K^* mit Addition $\oplus$ und Multiplikation $\circ$.

(b) Kann in K^* eine Ordnungsrelation definiert werden, so daß K^* ein angeordneter Körper wird?

(6 Punkte)