UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24-5=19 Punkte

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 12. Mai 2010, vor den Übungen

1. aus der Wertung genommen

2. (a) Zeige: die Komposition zweier bijektiver Abbildungen ist bijektiv.
   (b) Es sei X eine Menge, $P(X) := \{\pi|\ X \to X,\ \pi \text{ bijektiv}\}$ und $\circ$ bedeute die Komposition. Zeige: $(P(X), \circ)$ ist eine Gruppe.
   (c) Es sei $X = \{1, 2, 3\}$. Finde $\pi, \sigma \in P(X)$, so daß $\pi \circ \sigma \neq \sigma \circ \pi$ ist, d.h. $(P(X), \circ)$ ist nicht-kommutativ. (5 Punkte)

3. (a) Es seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$ und $g: Y \to X$ injektive Abbildungen. Zeige: es gibt eine bijektive Abbildung $h: X \to Y$.

   Hinweis:
   Betrachte $h = g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$.
   (b) Es seien X, Y, Z Mengen mit $X \prec Y$ und $Y \prec Z$. Zeige: Es gilt $X \prec Z$.
   (c) Zeige: es ist $\mathbb{N}(m) \prec \mathbb{N}(m+1)$. (4 Punkte)

4. Es werde auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eine Relation R durch

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

   definiert. Handelt es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation? (2 Punkte)

5. Zeige: für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $n \cdot m \in \mathbb{N}$. (3 Punkte)

6. (a) Beweise Satz 1.4.4 (Bruchrechnen).
   (b) Es seien a, b, c, d Elemete eines angeordneten Körpers.
   Zeige:

i. Aus $0 < a < b$ folgt

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}.$$

ii. Ist $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $b, d > 0$, so gilt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

iii. Aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2.$$

(5 Punkte)