UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24+5=29 Punkte

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, 19. Mai 2010, vor den Übungen

1. In den Axiomen für eine Gruppe haben wir gefordert:

   (G2) Existenz eines <u>linksneutralen</u> Elementes e: Für alle $a \in G$ gilt: $e \circ a = a$.

   (G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein <u>linksinverses</u> Element a^{-1} (bzgl. e), so daß $a^{-1} \circ a = e$ ist.

   (a) Zeige, daß aus $(G1) - (G3)$ folgt, daß a^{-1} auch rechtsinvers ist, d.h. es gilt: $a \circ a^{-1} = e$.

   (b) Zeige: e ist auch rechtsneutral, d.h. für alle $a \in G$ gilt: $a \circ e = a$.

   (c) Es gibt genau ein neutrales Element mit $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$.

   (d) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element a^{-1} mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

   (e) Was ist $(a \circ b)^{-1}$? (5 Punkte)

2. Die Folge der Fibonacci- Zahlen ist induktiv durch $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$ definiert. Es darf ohne Beweis angenommen werden, daß eine reelle Zahl $\sqrt{5}$ mit $(\sqrt{5})^2 = 5$ existiert. Zeige:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \qquad (1)$$

   <u>Hinweis:</u>
   Betrachte die Aussage: (1) ist richtig für alle $n \leq k$ und benutze vollständige Induktion nach k.
   (6 Punkte)

3. Es sei $U_n = \sum_{m=1}^{n} m^3$. Werte $U_{n+1} - U_n$ wie in Beispiel 1.5.5 auf zwei Arten aus und leite daraus eien Formel für $\sum_{m=1}^{n} m^2$ her. (5 Punkte)

4. Zeige durch vollständige Induktion:

   (a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

   (c) $\prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$

   (d) $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$ mit $a_1, \ldots, a_n > 0$. (9 Punkte)

5. Eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ erfülle

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + a$$

   mit $m, n \in \mathbb{N}$ und einem festen $a \in \mathbb{R}$. Weiter gelte $f(2) = 10$ und $f(20) = 118$.
   Bestimme die Konstante a und die Funktion f. (4 Punkte)