UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 26. Mai 2010, vor den Übungen

1. (a) Bestimme zu den folgenden komplexen Zahlen jeweils Real- und Imaginärteil sowie den Betrag:

   i. $\dfrac{1}{(1-i)^2}$

   ii. $\dfrac{3+i}{2-i}$

   iii. $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14}+i^{15}}{1+i}$

   iv. $(1+i)^{1999}$

   (b) Zeige, daß für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2).$$

(4 Punkte)

2. Der Binomialkoeffizient läßt sich analog zur Vorlesung auch für nichtganzzahlige n durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

definieren.
Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

   (a) $\binom{-1}{n} = (-1)^n$

   (b) $\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k} = (-1)^n\binom{\alpha-1}{n}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. (5 Punkte)

3. Beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Ungleichungen

   (a) $1 - \dfrac{1}{n} < \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

   (b) $1 + \dfrac{1}{n} < \left(1 + \dfrac{1}{n^2 - 1}\right)^n$. (5 Punkte)

4. (a) Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha + k}{k} = \binom{\alpha + n + 1}{n}.$$

   (b) Beweise: für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

$$\frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{k(k-1)}{n}\right) \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

(6 Punkte)

5. Sei M eine beliebige Menge und $m = |M|$ die Anzahl der Elemente von M.
   Zeige, daß für die Potenzmenge $P(M)$, die Menge aller Teilmengen von M, gilt, daß $|P(M)| = 2^m$.
   (4 Punkte)