UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, 2. Juni 2010, vor den Übungen

1. Untersuche nachstehende Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit Hilfe der Konvergenzdefinition auf Konvergenz:

   (a) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

   (b) $a_n = \dfrac{i^n \cdot n^2}{n^2+1}$

   (c) $a_n = \dfrac{1}{n+8}\left(\sum_{\nu=2}^{n} \nu\right) - \dfrac{n}{2}$ (6 Punkte)

2. Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Beweise, daß dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ gilt.

   Hinweis:
   Es darf ohne Beweis angenommen werden, daß für alle $x \in \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 0\}$ jeweils genau ein $y \in \mathbb{R}_0^+$ mit $y^2 = x$ existiert. Dieses $y = \sqrt{x}$ nennt man Wurzel aus x. (3 Punkte)

3. Zeige:
   Jede konvergente Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ erfüllt die Cauchy- Bedingung, d.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists n^*(\epsilon)$ mit $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n^*(\epsilon)$ (2 Punkte)

4. Es sei $|z| < 1$ und $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ durch $z_n = \sum_{k=0}^{n} kz^k$ definiert. Untersuche $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert. (4 Punkte)

5. Gegeben sei eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{C}$ derart, daß die Teilfolgen $(z_{2n})_{n=1}^{\infty}$, $(z_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ und $(z_{3n})_{n=1}^{\infty}$ konvergieren. Ist dann auch $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent? (Beweis oder Gegenbeispiel) (3 Punkte)

6. Betrachte die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n = \frac{n - \frac{(k-1)k}{2}}{k+1},$$

wobei $k = k(n) \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{(k-1)k}{2} < n \leq \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Zeige: Die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist das Intervall $[0, 1]$. (6 Punkte)