UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, 16. Juni 2010, vor den Übungen

1. Bestimme (falls existent) jeweils Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen (mit Beweis):

   (a) $M = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

   (b) $M = \{(x-a)(x-b)(x-c) < 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$. (3 Punkte)

2. Es sei $M = \{0 \leq x, x^2 \leq 2 \mid x \in \mathbb{Q}\}$. Zeige, daß $\sup M$ in $\mathbb{Q}$ nicht existiert. (3 Punkte)

3. Bestimme jeweils die Menge der Häufungswerte, sowie Limes superior und Limes inferior der angegebenen Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

   (a) $a_n = 2 + \frac{(-1)^n n}{n+1}$

   (b) $a_n = \frac{n}{m} - \left[\frac{n}{m}\right]$ mit einem festen $m \in \mathbb{N}$

   Hinweis:
   Die Gaußklammer $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner gleich x. (4 Punkte)

4. Es sei $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeige: Es gibt genau ein Paar $(k(n), r(n))$ mit $k(n), r(n) \in \mathbb{N}_0$, so daß $n = 2^{k(n)} + r(n)$ mit $0 \leq r(n) \leq 2^{k(n)} - 1$ gilt.

   (b) Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei wie folgt definiert:
   Es sei $n = 2^{k(n)} + r(n)$, wobei $k(n)$ und $r(n)$ nach a) definiert sind.
   Dann setzen wir $a_n := r(n) \cdot 2^{-k(n)}$.
   Bestimme die Menge der Häufungspunkte von (a_n) sowie $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$.
   Die Behauptungen sind zu beweisen. (6 Punkte)

5. Gegeben seien zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Beweise:

   (a) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$

   (b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(4 Punkte)

6. Es sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ und $I_n = [a_n, b_n]$.
   Zeige: $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ bildet eine Intervallschachtelung. (4 Punkte)