UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 48 Punkte

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 14. Januar 2011, vor den Übungen

1. (a) Zeige mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus folgende Darstellung:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{q_{n+1}}}}}}$$

mit $q_i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n+1$. Dies nennt man eine Kettenbruchdarstellung von $\frac{a}{b}$, welche man auch als

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}]$$

schreibt.

(b) Zeige: $[q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}+1] = [q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}, 1]$, d.h. die Kettenbruchentwicklung einer Bruchzahl ist nicht eindeutig, wenn man als letzte Zahl die 1 zuläßt.

(c) Gilt $[p_1, p_2, \ldots, p_k] = [q_1, q_2, \ldots, q_l]$ mit $p_k \neq 1$ und $q_l \neq 1$, so ist $k = l$ und $p_i = q_i$ für $0 \leq i \leq k$.

(d) Die Umlaufzeit der Erde um die Sonne ist recht genau

$$365\text{d } 5\text{h } 48\text{min } 45{,}8\text{s} = \left(365 + \frac{104629}{432000}\right) d.$$

i. Bestimme hiervon die Kettenbruchentwicklung.

ii. Begnügt man sich mit einer Näherung, bricht man die Kettenbruchentwicklung an einer bestimmten Stelle ab.
An welcher Stelle unterbrechen der Julianische bzw. der Gregorianische Kalender diese Kettenbruchentwicklung?

(e) Wir betrachten nun die Folge von Näherungsbrüchen eines Kettenbrüchen.
Es sei $[x_0, x_1, \ldots, x_N]$ ein Kettenbruch mit $N+1$ Variablen, und $[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ sei der k- te Näherungsbruch mit $k \leq N$.
Es sei

$$P_0 := x_0, \quad P_1 := x_1 x_0 + 1 \quad \text{und} \quad P_k := x_k P_{k-1} + P_{k-2} \quad \text{sowie}$$
$$Q_0 := 1, \quad Q_1 := x_1 \quad \text{und} \quad Q_k := x_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad \text{für } k = 2, 3, \ldots$$

oder in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} P_k \\ Q_k \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige:

i. Für $k \geq 0$ gilt

$$\frac{P_k}{Q_k} = [x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

ii. Für $k \geq 1$ gilt

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{Q_k Q_{k-1}}.$$

iii. Für $k \geq 2$ gilt

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = \frac{(-1)^k x_k}{Q_k Q_{k-2}}.$$

(f) Irrationale Zahlen besitzen eine nichtabbrechende aber möglicherweise periodische Kettenbruchentwicklung. Wir können sie anhand folgender Methode bestimmen:
Es sei α irrational. Dann setzen wir $a_0 := [\alpha]$ (klassische Gaußklammer). Weiter ist

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha - a_0}}.$$

Wegen $0 < \alpha - a_0 < 1$ ist $\alpha_1 := (\alpha - a_0)^{-1} > 1$.
Wir setzen $a_1 := [\alpha_1]$, und indem wir auf diese Weise fortfahren, ergibt sich die nichtabbrechende Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ der irrationalen Zahl α.
Bestimme die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ und die ersten vier Elemente der Kettenbruchentwicklung von π.

(g) Zeige: die Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Zahl α ist genau dann periodisch, wenn α eine Lösung einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ist.

(h) i. Zeige die Binetsche Formel, die eine explizite Darstellung für die n- te Fibonaccizahl angibt:

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

ii. Bestimme die Kettenbruchentwicklung des Goldenen Schnittes $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ und von $\alpha - 1$.

iii. Zeige:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

(i) Die Formel

$$r_m = \left[\frac{13m - 1}{5}\right] \bmod 7$$

aus der Kalenderformel (siehe Übungsblatt 4) ist nicht vom Himmel gefallen.
Woher kommt sie aber?

(48 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!