UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 48 Punkte

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 28. Januar 2011, vor den Übungen

1. Es sei S_n die Menge der Permutationen von $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. So ist etwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a & b & c & \ldots & k \end{pmatrix}$$

die Abbildung Φ mit $\Phi(1) = a$, $\Phi(2) = b$, $\Phi(3) = c$, …, $\Phi(n) = k$ mit $a, b, c, \ldots, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   (a) Man definiert: Für $\Phi, \sigma \in S_n$ setzt man $(\Phi \circ \sigma)(x) := \Phi(\sigma(x))$.
   Zeige: $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe.

   (b) Es sei S_3 die Gruppe aller Permutationen von $\{1, 2, 3\}$.

      i. Zeige: S_3 ist nichtabelsch.

      ii. Bestimme sämtliche Untergruppen von S_3.

      iii. Finde die Rechtsnebenklassen und Linksnebenklassen von $H = \{id, (12)\}$.

      iv. Finde die Rechtsnebenklassen und Linksnebenklassen von

$$N = \left\{ id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(12 Punkte)

2. Es sei $R = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und

$$\begin{aligned} p(x) &= \overline{1} + \overline{2}x + \overline{3}x^3 \\ q(x) &= \overline{2} + \overline{1}x^2 + \overline{4}x^4. \end{aligned}$$

Hier bedeutet $\overline{a} = a \bmod 5$.
Berechne: $p(x) \cdot q(x) = \overline{a_0} + \ldots + \overline{a_7}x^7$ mit $\overline{a_j} \in \{\overline{0}, \ldots, \overline{4}\}$. (6 Punkte)

3. Bestimme die Lösungen der quadratischen Kongruenz $2x^2 + 25x + 12 \equiv 0 \bmod 35$. (6 Punkte)

4. Man nennt eine reelle Zahl α <u>durch rationale Zahlen approximierbar von der Ordnung n</u>, wenn eine nur von α abhängige Konstante K existiert, so daß es unendlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ und

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{K}{q^n}$$

gibt.

(a) Von welcher Ordnung sind rationale Zahlen approximierbar, von welcher Ordnung die Zahl $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$?

(b) Zeige: Eine reelle algebraische Zahl vom Grad n, d.h. eine Lösung von

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ist nicht von höherer als n- ter Ordnung durch rationale Zahlen approximierbar.

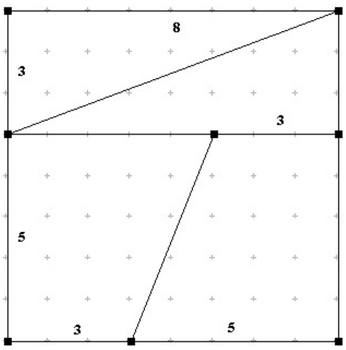
Hinweis:
Verwende den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(c) Eine Zahl, die von beliebig hoher Ordnung Ordnung approximierbar ist, nennt man transzendent (also gerade keine Lösung einer algebraischen Gleichung).
Zeige:

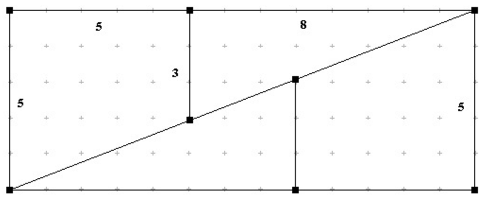
$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

ist transzendent. (14 Punkte)

5. Wir wandeln ein Quadrat folgendermaßen in ein Rechteck um:



$\Rightarrow$



Welche falsche Aussage würde hieraus folgen, und wo ist der Fehler?

Hinweis:
Alle Seitenlängen bestehen aus Fibonaccizahlen. (10 Punkte)