UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 11

Abgabe: Dienstag, 18. Januar 2011, vor den Übungen

1. Ein topologischer Raum (X, T) heißt Hausdorffsch, falls zu allen $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$ existieren.
   (a) Zeige: Jeder metrische Raum ist Hausdorffsch.
   (b) Zeige: In einem metrischen Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.
   (c) Es sei $X \neq \emptyset$ und $\mathrm{T} = \{\emptyset, X\}$.
      i. Zeige: (X, T) ist ein topologischer Raum.
      ii. Ist $|X| \geq 2$, so ist X nicht Hausdorffsch.
      iii. Eine beliebige Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ mit $x_k \in X$ hat jedes $x^* \in X$ als Grenzwert.
   (d) Es sei $X \neq \emptyset$ und T die Menge aller Teilmengen von X. Es sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge mit $x_k \in X$. Zeige:
      i. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^* \Leftrightarrow \exists k_0 \colon x_k = x^* \quad \forall k \geq k_0$.
      ii. Der Raum (X, T) ist Hausdorffsch.
      iii. Jedes $Y \subset X$ ist zugleich offen und abgeschlossen. (10 Punkte)

2. (a) Gib ein Beispiel einer Folge $(O_k)_{k=1}^{\infty}$ offener Teilmengen $O_k \subset \mathbb{R}^n$ an, so daß $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} O_k$ nicht offen ist.
   (b) Gib ein Beispiel einer Folge $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ abgeschlossener Teilmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ an, so daß $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ nicht abgeschlossen ist. (4 Punkte)

3. Es sei

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ k - k^2 x & \text{für} \quad 0 < x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}$$

und $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Bestimme (4 Punkte)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 f(x)\,dx.$$

4. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeige: der Rand von Y ist abgeschlossen.

(2 Punkte)

5. Es sei $C_0 = [0, 1]$ und $C_k = \bigcup_{j=1}^{l_k} I_{k,j}$ mit $I_{k,j}$ abgeschlossenen Intervallen.

   In jedem Schritt wird das mittlere Intervalldrittel entfernt, und es verbleiben das jeweilige rechte Drittel, welches wir $I_{k,j}^{(1)}$ nennen, und das linke Drittel, das entsprechend $I_{k,j}^{(2)}$ genannt wird, übrig. Es sei $I_{k,j} = I_{k,j}^{(1)} \cup I_{k,j}^{(2)}$. Daraus wird dann

$$C_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{l_k} I_{k,j}^{(1)} \cup \bigcup_{j=1}^{l_k} I_{k,j}^{(2)}$$

   konstruiert, und es sei $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$.

   (a) Zeige: C ist abgeschlossen.

   (b) Es sei

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in C \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeige:

$$\int_0^1 \chi(x)\, dx = 0.$$

(4 Punkte)