UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 12

Abgabe: Dienstag, 25. Januar 2011, vor den Übungen

1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{F})$ heißt zusammenhängend, wenn es keine nichtleeren offenen Teilmengen O_1, O_2 von X mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $O_1 \cup O_2 = X$ gibt.

   (a) Es seien O_1 und O_2 offene nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $O_1 \cup O_2 = \mathbb{R}$. Weiter sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ durch

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in O_1 \\ 0 & \text{für} \quad x \in O_2. \end{cases}$$

   definiert. Zeige: f ist stetig.

   (b) Zeige: die in Teilaufgabe a) beschriebenen Teilmengen O_1 und O_2 kann es nicht geben. Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit der Metrik aus der Vorlesung ist also zusammenhängend.

   (c) Zeige: der metrische Raum $(\mathbb{Q}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ist nicht zusammenhängend.

   (4 Punkte)

2. Es sei $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$, wobei $\mathcal{U}_j = \left(2^{-(j+2)}, 2^{-j}\right)$.

   (a) Zeige: $\mathcal{U}$ ist eine Überdeckung von $(0, 1)$.

   (b) Besitzt $\mathcal{U}$ eine endliche Teilüberdeckung? Die Antwort ist zu begründen.

   (c) Es sei $\mathcal{W}(\epsilon) = \mathcal{U} \cup \{(-\epsilon, \epsilon), (1-\epsilon, 1+\epsilon)\}$ für $\epsilon > 0$. Zeige: $\mathcal{W}(\epsilon)$ ist eine Überdeckung von $[0, 1]$.

   (d) Es sei $N(\mathcal{W}, \epsilon)$ die Mindestanzahl der Elemente einer endlichen Teilüberdeckung von $\mathcal{W}(\epsilon)$. Zeige:

   $$\lim_{\epsilon \to 0} N(\mathcal{W}, \epsilon) = \infty.$$

   (6 Punkte)

3. Es sei $K = K_1 \cup K_2$ mit $K_1 = \{(x, y)\colon x \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $K_2 = \{(x, y)\colon x > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

   (a) Bestimme für jede der Mengen K, K_1, K_2 die Mengen der Berührpunkte, isolierten Punkte, inneren Punkte und Randpunkte.

   (b) Welche der Mengen K, K_1, K_2 sind offen, welche abgeschlossen, welche kompakt? (4 Punkte)

4. Sind die nachfolgenden Mengen offen, abgeschlossen oder kompakt? Bestimme jeweils das Innere, die abgeschlossene Hülle und den Rand der Menge.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ ||x|| \leq 5\}$

   (b) $B = A \cap \{x \in \mathbb{R}^3 |\ x_3 > 0\}$

   (c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \in (0,3),\ x_2 > x_1^2\}$. (6 Punkte)

5. Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Beweise oder widerlege:

   (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

   (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. (4 Punkte)