UNIVERSITÄT ULM

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 13

Abgabe: Dienstag, 1. Februar 2011, vor den Übungen

1. Untersuche folgende Funktionen auf Stetigkeit:

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} \sinh x \\ \cosh x \end{pmatrix}$.

   (b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   $$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

   (3 Punkte)

2. Zeige, daß für folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \alpha x)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, f im Punkt $(0,0)$ jedoch nicht stetig ist.

   (a) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 < x_1 = x_2^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$

   (6 Punkte)

3. Es seien K_1 und K_2 kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes (M, d) mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Zeige: Es existieren disjunkte offene Mengen O_1 und O_2 mit $K_1 \subset O_1$ und $K_2 \subset O_2$. (7 Punkte)

4. Es seien die Funktionen $\Psi_p\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\Psi_p(f) = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^p \, dx$ für $p \in \{1,2\}$ gegeben.

   (a) Untersuche die Funktionen Ψ_p auf Stetigkeit, wobei $C[0,1]$ mit der $|| \cdot ||_1$- Norm versehen sei, d.h. $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)| \, dx$.

   (b) Sind die Mengen $M_p = \{f \in C[0,1] | \; \Psi_p(f) > 0\}$ für $p \in \{1,2\}$ in $(C[0,1], || \cdot ||_1)$ offen?

   Hinweis:

   Unter $C[0,1]$ versteht man den Raum der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen. (8 Punkte)