UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 14

Abgabe: Dienstag, 8. Februar 2011, vor den Übungen

1. Untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und bestimme im Falle der Existenz alle Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)^T$:

   (a) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$g(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{für} \quad (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$$

   (b) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$h(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2+x_2^4} & \text{für} \quad (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$$

   (6 Punkte)

2. Gegeben sei die Funktion
   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{für} \quad (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für} \quad (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$$

   Zeige:

   (a) Die Funktion f ist stetig differenzierbar.

   (b) Es existieren $f_{x_1x_2}$ und $f_{x_2x_1}$ auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)^T\}$.

   (c) Es gilt $f_{x_1x_2}(0,0) = -1$ und $f_{x_2x_1}(0,0) = 1$. (4 Punkte)

3. Existiert eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   (a) $f'(x_1,x_2) = \left(e^{x_1} + \frac{x_2^2}{2}, x_1x_2\right)$

   (b) $f'(x_1,x_2) = \left(x_1 \cdot \frac{x_2^2}{2}, x_1x_2\right)$

   mit für alle $(x_1,x_2)^T \in \mathbb{R}^2$? Bestimme im Falle der Existenz eine solche Funktion. (4 Punkte)

4. Gegeben sei eine Konstante $c > 0$ und die Funktion

$$f\colon (\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)^T\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{||x||} \cdot \sin(||x|| - ct).$$

Zeige, daß

$$\sum_{k=1}^{3} f_{x_k x_k}(x,t) = \frac{1}{c^2} \cdot f_{tt}(x,t)$$

gilt. (3 Punkte)

5. Berechne folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^3 \frac{(t+1) \cdot x^t}{t^2+1} \, dt \, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{xy} xyz \, dz \, dy \, dx$ (4 Punkte)

6. Beweise Satz 7.2.8. (3 Punkte)