UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte, alles Zusatzpunkte

Übungsblatt 15

Abgabe: Dienstag, 15. Februar 2011, vor den Übungen

1. Es sei $X \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\vec{x}_0 \in X$ und $f\colon X \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar. Es sei $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und $f_{xx}(\vec{x}_0) = f_{xy}(\vec{x}_0) = f_{yy}(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Mindestens eine der Ableitungen dritter Ordnung f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy} und f_{yyy} sei in $\vec{x}_0$ von 0 verschieden.
   Zeige: f besitzt in $\vec{x}_0$ kein Extremum. (4 Punkte)

2. Es sei $C = \{f\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig}\}$, und für $f, g \in C$ sei $d(f, g) = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f(x) - g(x)|$. Weiter sei $L\colon C \to C$, $f \to L(f)$ durch $L(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$ gegeben.

   (a) Zeige: (C, d) ist ein vollständiger metrischer Raum.

   Zeige mit dem Banachschen Fixpunktsatz:

   (b) Es gibt genau ein $f \in C$ mit $L(f) = f$.

   (c) Es gibt genau ein $f \in C$ mit $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$ für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

   (d) Es sei $f_0 = 1$, die konstante Einsfunktion. Weiter sei $f_{n+1} = L(f_n)$.
   Berechne die Folge (f_n) und $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (5 Punkte)

3. Es sei $\vec{F}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ durch $\vec{F} = (F_1, F_2)$ mit

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) &= x_1 \cdot \cos(x_2 x_3 y_1) + e^{y_1} + \sin(y_1 y_2) - 1 \\ F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) &= x_2 + x_3^2 + \cos(y_1 y_2) + e^{y_2} - 2 \end{aligned}$$

   gegeben. Für $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ bezeichne

$$U_\delta = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 |\ ||\vec{x}|| < \delta\} \quad \text{und} \quad V_\epsilon = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 |\ ||\vec{y}|| < \epsilon\}.$$

   (a) Zeige:
   Es gibt $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ und genau eine Funktion $\vec{f}\colon U_\delta \to V_\epsilon$, die auf U_δ stetig und in $\vec{x}_0 = \vec{0}$ total differenzierbar ist, so daß für $\vec{x} \in U_\delta$ und $\vec{y} \in V_\epsilon$ folgendes gilt:

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}).$$

(b) Bestimme die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{0})$$

(3 Punkte)

4. Berechne das Integral:

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{-xy}^{xy} z^2 \, dz \, dy \, dx$$

(2 Punkte)

5. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3$ gegeben.

   (a) Finde sämtliche kritischen Stellen von f und entscheide, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt

   (b) Hat f ein globales Maximum oder Minimum? (3 Punkte)

6. Es sei $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\vec{f} = (u, v, w)$ mit

$$\begin{aligned} u = u(x,y,z) &= x + e^y \\ v = v(x,y,z) &= y + e^z \\ w = w(x,y,z) &= e^x + z \end{aligned}$$

gegeben.
Zeige:

   (a) Die Funktion $\vec{f}$ hat lokal überall eine inverse Funktion $\vec{f}^{-1}\colon (u,v,w) \to (x,y,z)$.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Berechne die Determinante von $\frac{\partial f}{\partial x}$.

   (b) Es seien x_0, y_0, x_1, y_1 fest. Die Funktion $\tilde{u}(t) = x_0 + tx_1 + \exp(y_0 + ty_1)$ ist streng monoton, falls $\mathrm{sgn}(x_1) \cdot \mathrm{sgn}(x_2) \neq -1$ und $(x_1, y_1) \neq (0,0)$ ist.

   (c) Es seien $\vec{x}_0, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{z} \neq \vec{0}$. Weiter sei $g(\vec{x}_0, \vec{z}) = \{\vec{x}_0 + t\vec{z} |\ t \in \mathbb{R}\}$.
   Zeige unter Verwendung von b):
   Für jede Gerade $g = g(\vec{x}_0, \vec{z})$ ist mindestens eine der Restriktionen $u\big|_g$, $v\big|_g$ bzw. $w\big|_g$ injektiv.

   (d) Die Funktion $\vec{f}$ ist injektiv.

   (e) Es sei $R \geq e^3$. Dann gilt für alle (x,y,z) mit $\max\{|x|,|y|,|z|\} > R^2$ auch $\max\{|x|,|y|,|z|\} > R$.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Unterscheide folgende Fälle:
   <u>Fall 1:</u> Es sei $x \leq \log R$, $y \leq \log R$, $z \leq \log R$.
   <u>Fall 2:</u> Fall 1 trifft nicht zu.

   (f) Es sei $(u_0, v_0, w_0) \in Rd\vec{f}(\mathbb{R}^3)$, dem Rand des Bildes von $\vec{f}$.
   Es gibt dann (x_0, y_0, z_0) mit $\vec{f}(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, w_0)$.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Verwende das Ergebnis von e) und den Satz von Bolzano- Weierstraß im $\mathbb{R}^n$.

   (g) Es gilt: $\vec{f}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$. (7 Punkte)