UNIVERSITÄT ULM
Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungen zu Analysis II

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Übungsblatt 2

Abgabe: Dienstag, 2. November 2010, vor den Übungen

1. Untersuche folgende Folgen bzw. Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:

   (a) $f_n(x) = (1-x) \cdot x^n$ auf $[0,1]$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ auf $I = [0,1]$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)}$ auf $[1,\infty)$. (7 Punkte)

2. Zeige:

   (a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen eine auf $[0,1]$ differenzierbare Funktion $f(x)$.

   (b) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ konvergiert auf $[0,1]$, nimmt aber für $x=1$ einen von $f'(1)$ verschiedenen Wert an. (4 Punkte)

3. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei f' nicht stetig in $x_0 \in (a,b)$.
   Zeige, daß x_0 keine hebbare Unstetigkeitsstelle von f' ist.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Hierbei heißt eine Unstetigkeitsstelle x_0 einer Funktion $g\colon D \to \mathbb{R}$ hebbar, falls ein $y_0 \in \mathbb{R}$ so existiert, daß die Funktion

   $$\tilde{g} : D \to \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für} \quad x \in D\backslash\{x_0\} \\ y_0 & \text{für} \quad x = x_0. \end{cases}$$

   stetig in x_0 ist.
   Mit anderen Worten, sie heißt hebbar, falls $\lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} g(x) := \lim_{x\to x_0} g|_{D\backslash\{x_0\}}(x) = y_0$ existiert.
   (2 Punkte)

4. Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem sei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = r$.
Zeige:

   (a) Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1}$ besitzen Konvergenzradius $\sqrt{r}$.

   (b) Die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$ besitzen Konvergenzradius r. (4 Punkte)

5. Berechne den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{5^n}$

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{2n}{n} z^{2n}$

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{4n}}{(3+(-1)^n)^{7n}}$

   (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{n} z^n$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$. (7 Punkte)